

Iterationsverfahren für nichtsymmetrische Gleichungssysteme und Approximationsmethoden im Komplexen

M. Eiermann^{1,2}, R. S. Varga^{1,2}, Kent, Ohio, W. Niethammer¹, Karlsruhe

Lineare Gleichungssysteme, die heute in den verschiedenen Anwendungen auftreten, sind häufig groß – 10^5 und mehr Unbekannte kommen oft vor –, und die Koeffizientenmatrizen sind dünn besetzt. Die iterative Lösung solcher Systeme ist ein immer wieder aktuelles Problem der Numerik. Verfahren für Systeme mit *symmetrischer* Koeffizientenmatrix, wie sie beispielsweise bei der Diskretisierung elliptischer Randwertaufgaben entstehen, sind schon früher gründlich studiert worden; die entsprechenden Ergebnisse finden sich in den Monographien von Varga [53], Young [57] und Hageman-Young [23].

In den letzten Jahren werden zunehmend *nichtsymmetrische* lineare Gleichungssysteme betrachtet. Um für solche Systeme Iterationsverfahren zu konstruieren und zu analysieren, werden häufig Konzepte der *Summierungstheorie*, der *Theorie der konformen Abbildung* und der *komplexen Approximationstheorie* herangezogen; einige Schlagworte in diesem Zusammenhang sind *maximale Konvergenz von Polynomen*, *Interpolation in gleichverteilten Knoten* und *Faber-Entwicklungen*. Ziel dieser Übersicht ist es, diese Verbindung zwischen komplexer Analysis einerseits und numerischer linearer Algebra andererseits aufzuzeigen und dabei den Nutzen funktionentheoretischer Methoden für die Untersuchung iterativer Verfahren herauszustellen.

1 Problemstellung und Übersicht

Gegeben seien eine nichtsinguläre Matrix $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ und ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$. Mit Hilfe einer Zerlegung der Koeffizientenmatrix $A = M - N$ mit M nichtsingulär, kann man dieses System auch in der äquivalenten Form

$$(1.1) \quad Mx = Nx + b \quad \text{oder} \quad x = Tx + c,$$

$T := M^{-1}N = I - M^{-1}A$ und $c := M^{-1}b$, schreiben. Die Fixpunktgestalt von (1.1) führt in natürlicher Weise auf das Iterationsverfahren

$$(1.2) \quad x_0 \in \mathbb{C}^n; \quad Mx_m := Nx_{m-1} + b \quad \text{oder} \quad x_m := Tx_{m-1} + c \quad (m \geq 1),$$

Die Arbeit der Autoren wurde durch Zuschüsse des Air Force Office of Scientific Research (¹) und der Alexander von Humboldt-Stiftung (²) gefördert.

das oft *Verfahren der sukzessiven Approximation* genannt wird (vgl. Faddejew Faddejewa [13, S. 222]).

Jede Zerlegung $A = M - N$ erzeugt auf diese Weise ein Iterationsverfahren, sinnvollerweise wird man aber verlangen, daß M einfach zu invertieren ist, oder daß man das System (1.2) leicht nach x_m auflösen kann. Ist $A = D - L - R$ die *Standardzerlegung* von A , d. h. D ist eine Diagonalmatrix, L eine echte untere und R eine echte obere Dreiecksmatrix, so führt die Zerlegung $M = D$ zum *Gesamtschritt-* oder *Jacobi-Verfahren*, $M = D - L$ zum *Einzel-schritt-* oder *Gauß-Seidel-Verfahren* und $M = \omega^{-1}D - L$ ($\omega \neq 0$) zum Verfahren der *Successive-Over-Relaxation* (SOR-Verfahren). Weitere Zerlegungen und die zugehörigen Iterationsverfahren sind z. B. bei Varga [53] beschrieben.

Ist $x := (I - T)^{-1}c$ die eindeutig bestimmte Lösung von (1.1), so gilt für den Fehlervektor $e_m := x - x_m$

$$(1.3) \quad e_m = T^m e_0 \quad (m \geq 0).$$

Sind $\tau_j (1 \leq j \leq n)$ die Eigenwerte von T , dann bezeichnen wir mit $\sigma(T) := \{\tau_j : 1 \leq j \leq n\}$ das *Spektrum* von T und mit $\rho(T) := \max \{|\tau| : \tau \in \sigma(T)\}$ den *Spektralradius* von T . Aus (1.3) folgt, daß die Iteration (1.2) genau dann für jeden Startvektor x_0 gegen die Lösung x konvergiert, wenn $\rho(T) < 1$ erfüllt ist. Außerdem gilt für jede Norm in \mathbf{C}^n

$$(1.4) \quad \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \sup_{e_0 \neq 0} \left[\frac{\|e_m\|}{\|e_0\|} \right]^{1/m} = \rho(T)$$

(vgl. Varga [53, S. 67]); wir bezeichnen deshalb $\rho(T)$ als *asymptotischen Konvergenzfaktor* der Vektorfolge $\{x_m\}_{m \geq 0}$, die durch (1.2) definiert ist. Ein weiteres häufig verwendetes Maß für die Konvergenzgeschwindigkeit der Iteration (1.2) ist, falls $\rho(T) < 1$, die *asymptotische Konvergenzrate*, die durch

$$(1.5) \quad R(T) := -\ln \rho(T)$$

erklärt ist ([53, S. 67]). Grob gesagt muß man durchschnittlich $R(T)^{-1}$ Schritte der Iteration (1.2) durchführen, damit die Norm des Ausgangsfehlers $e_0 = x - x_0$ um den Faktor $1/e$ reduziert wird.

Um nun in Fällen, in denen die Folge $\{x_m\}_{m \geq 0}$ von (1.2) divergiert, Konvergenz zu erzwingen, oder um die Konvergenz dieser Folge zu beschleunigen, bietet es sich an – wie Forsythe [14] und Varga [53, S. 133] bemerkten – Methoden der *Summierungs-* oder *Limitierungstheorie* einzusetzen. Wir betrachten die *Summierungsverfahren*, die durch eine unendliche untere Dreiecksmatrix definiert sind (vgl. Zeller-Beekmann [59, S. 5]); diese Klasse ist für unsere Zwecke einerseits genügend allgemein, andererseits ist sie unter konstruktiven Gesichtspunkten besonders nützlich.

Dazu bilden wir mit Hilfe der Matrix

$$(1.6) \quad P = \begin{bmatrix} \pi_{0,0} & & & & 0 \\ \pi_{1,0} & \pi_{1,1} & & & \\ \pi_{2,0} & \pi_{2,1} & \pi_{2,2} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}, \quad \pi_{m,j} \in \mathbf{C} \quad (m \geq 0, 0 \leq j \leq m),$$

und der Folge $\{x_m\}_{m \geq 0}$ von (1.2) die Vektoren

$$(1.7) \quad y_m := \sum_{j=0}^m \pi_{m,j} x_j \quad (m \geq 0);$$

y_m kann also als Mittel der Iterierten x_0, \dots, x_m mit eventuell komplexen Koeffizienten $\pi_{m,j}$ aufgefaßt werden.

Falls der Startvektor x_0 in (1.2) gleich der Lösung x von (1.1) ist, so gilt $x_m = x$ ($m \geq 0$). In diesem Fall erwarten wir $y_m = x$ für alle $m \geq 0$. Für die *Transformationsmatrix* P bedeutet dies, daß ihre Zeilensummen gleich 1 sind:

$$(1.8) \quad \sum_{j=0}^m \pi_{m,j} = 1 \quad (m \geq 0).$$

Der Fehler $\tilde{e}_m := x - y_m$ der transformierten Folge erfüllt

$$\tilde{e}_m = \sum_{j=0}^m \pi_{m,j} x - \sum_{j=0}^m \pi_{m,j} x_j = \sum_{j=0}^m \pi_{m,j} e_j;$$

d. h. wir erhalten aus (1.3)

$$(1.9) \quad \tilde{e}_m = \left(\sum_{j=0}^m \pi_{m,j} T^j \right) e_0 = p_m(T) e_0 \quad (m \geq 0)$$

mit den Polynomen

$$(1.10) \quad p_m(z) := \sum_{j=0}^m \pi_{m,j} z^j \quad (m \geq 0).$$

Die Matrix P definiert also eine Folge $\{p_m\}_{m \geq 0}$ von Polynomen mit komplexen Koeffizienten und den Eigenschaften $\text{grad}(p_m) \leq m$ sowie wegen (1.8)

$$(1.11) \quad p_m(1) = 1 \quad (m \geq 0).$$

Unsere Aufgabe ist es demnach, die Matrix P , d. h. die Polynomfolge $\{p_m\}_{m \geq 0}$, so zu wählen, daß die Vektoren y_m möglichst schnell gegen die Lösung x von (1.1) – oder äquivalent, die Fehler \tilde{e}_m möglichst schnell gegen 0 – streben.

Weil bei der Konstruktion der Vektoren y_m zuerst nach (1.2) iteriert und anschließend nach (1.7) rein algebraisch eine Linearkombination der Iterierten gebildet wird, nennt Varga [52] ein Verfahren (1.7) eine *semiterative Methode* in bezug auf die Iteration (1.2), Forsythe [14] spricht von *linear acceleration*; wegen (1.9) wird häufig auch die Bezeichnung *polynomiale Konvergenzbeschleunigung* benutzt (siehe Young [57], Hageman-Young [23] u. a.).

Für symmetrische positiv definite Matrizen sind solche polynomialen Methoden vielfach untersucht worden; die verschiedenen Ansätze sind z. B. bei Varga [53, S. 159] und Householder [25, S. 114] beschrieben. Householder unterscheidet zwischen „Methods of Projection“ (vgl. [25, § 4.2]) und „Norm-Reducing Methods“ (vgl. [25, § 4.3]). Projektionsmethoden – hier ordnen sich beispielsweise das Verfahren der konjugierten Gradienten (vgl. [24]) und die Lanczos-Iteration (vgl. [29]) ein – werden in den letzten Jahren zunehmend auch zur Lösung nichtsymmetrischer Gleichungssysteme herangezogen (vgl. Saad-

Schultz [46]; dort werden einige der wichtigsten Arbeiten zu diesem Problem zitiert). Wir werden uns hier ausschließlich mit der Klasse der „Norm-Reducing Methods“ beschäftigen; Householder weist im Zusammenhang mit diesen Verfahren darauf hin, daß für den Fall nichtreeller Eigenwerte von T „no theory has been developed“. Über Fortschritte in dieser Richtung soll hier berichtet werden.

Wir beschreiben nun kurz ein Beispiel, das von verschiedenen Autoren ebenfalls als „Modellproblem“ für iterative Verfahren zur Lösung nichtsymmetrischer Gleichungssysteme verwendet wurde (vgl. etwa Hageman-Young [23, Chapter 12.6] oder Saad [45]). Auch in den folgenden Abschnitten werden wir uns häufig auf dieses spezielle Beispiel beziehen:

Beispiel 1.1. Wir betrachten die Randwertaufgabe

$$(1.12) \quad u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) + \gamma u_x(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in S, \\ u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial S,$$

im Einheitsquadrat $S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < x, y < 1\}$ mit dem Rand ∂S . Hier bezeichnen γ eine reelle Konstante und $f : S \cup \partial S \rightarrow \mathbf{R}$ eine stetige Funktion. Man kann (1.12) als einfachen Prototyp einer Konvektions-Diffusionsgleichung ansehen. γ entspricht dann der Reynoldszahl. Diskretisiert man dieses Problem unter Verwendung zentraler Differenzen mit der Schrittweite $h = 1/(N + 1)$ in beiden Koordinatenrichtungen, so erhält man ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$, dessen Koeffizientenmatrix $A \in \mathbf{R}^{n,n}$ mit $n := N^2$ (für kleines h) sehr groß, aber dünn besetzt ist.

Dieses Problem ist für Testzwecke deshalb gut geeignet, weil man die Eigenwerte des Gesamtschritt- oder Jacobi-Operators $T := I - D^{-1}A$ explizit kennt; es gilt nämlich (vgl. Young-Jea [58]):

$$\sigma(T) := \{ \cos(\pi j/(N + 1))/2 + i\sqrt{\lambda^2 - 1} \cos(\pi k/(N + 1))/2 : 1 \leq j, k \leq N \}$$

mit $\lambda := \gamma h/2$. Für $\lambda^2 > 1$ hat T komplexe Eigenwerte, die alle in dem Rechteck

$$(1.13) \quad R_{\alpha, \beta} := \{z \in \mathbf{C} : |\operatorname{Re} z| \leq \alpha, |\operatorname{Im} z| \leq \beta\} \quad \text{mit}$$

$$(1.14) \quad \alpha := \cos(\pi/(N + 1))/2 < 1/2, \quad \beta := \sqrt{\lambda^2 - 1} \cos(\pi/(N + 1))/2$$

enthalten sind; α ist demnach unabhängig von λ , während β mit λ wächst. Für die Schrittweite $h = 0.1$ erhält man $\alpha = 0.4755$; Tabelle 1 am Ende des dritten Abschnitts zeigt β sowie den Spektralradius $\rho(T) = (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}$ für einige Werte von λ . Offensichtlich divergiert das Gesamtschrittverfahren für betragsgroße λ , so ergibt sich für $\lambda = 250$ beispielsweise $\rho(T) = 118.9$.

Ist nun eine semiiterative Methode durch eine Matrix P gemäß (1.7) definiert, so gilt nach (1.9) für den Fehler $\tilde{e}_m = p_m(T)e_0$. Kennen wir nun wie im Beispiel 1.1 die Eigenwerte von T , so könnten wir für p_m ein Vielfaches des charakteristischen Polynoms von T wählen und hätten $\tilde{e}_m = \mathbf{0}$ ($m \geq n$) nach dem Satz von Cayley-Hamilton. Diese „triviale“ Lösung verbietet sich in der Praxis aus Gründen: Einmal wird man in der Regel die Eigenwerte von T nicht kennen, zum anderen erwartet man bei Systemen mit großer Ordnung n einen ausreichend kleinen Fehler schon nach sehr viel weniger als n Schritten.

Dagegen ist es realistisch anzunehmen, daß man einen kompakten Bereich $\Omega \subset \mathbb{C}$ kennt, der $\sigma(T)$ enthält, wie im Beispiel 1.1 das Rechteck $R_{\alpha, \beta}$. Weil das System (1.1) $x = Tx + c$ nach Voraussetzung eindeutig lösbar ist, gilt $1 \notin \sigma(T)$, und wir können $1 \notin \Omega$ annehmen. Die Polynomfolge $\{p_m^*\}_{m \geq 0}$, deren Glieder das Minimierungsproblem

$$\min \{ \max_{z \in \Omega} |p_m(z)| : p_m(1) = 1, \text{grad}(p_m) \leq m \}$$

lösen, erzeugt in gewisser Weise eine optimale semiiterative Methode für unser Problem (vgl. Abschnitt 3). Diese Polynome existieren immer, sind jedoch nur bei einigen speziellen Bereichen Ω konstruktiv zugänglich.

Wir beschränken uns deshalb darauf, *asymptotisch optimale Verfahren* zu konstruieren. Dazu wird ähnlich wie in (1.4) ein *asymptotischer Konvergenzfaktor* $\kappa(\Omega, P)$ von Ω bezüglich P definiert (§ 3). Weiß man a priori, daß das Spektrum der Matrix T in Ω enthalten ist, so ist – grob gesagt – $\kappa(\Omega, P)$ eine obere Schranke für den Konvergenzfaktor $\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \|\tilde{e}_m\|^{1/m}$ der Fehlerfolge (1.9) des durch P induzierten semiiterativen Verfahrens. Das Infimum von $\kappa(\Omega, P)$ über alle P nennen wir schließlich den *asymptotischen Konvergenzfaktor* $\kappa(\Omega)$ von Ω . Daraus kann man folgern, daß es *keine* semiiterative Methode (1.7) gibt, so daß der Konvergenzfaktor $\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \|\tilde{e}_m\|^{1/m}$ für *jede* Matrix T mit $\sigma(T) \subseteq \Omega$ kleiner als $\kappa(\Omega)$ wird. Ein von P induziertes Verfahren heißt aus diesem Grund *asymptotisch optimal* für Ω , wenn $\kappa(\Omega, P) = \kappa(\Omega)$ gilt (§ 4).

Um Aussagen über solche asymptotisch optimalen Verfahren zu gewinnen, wird in § 2 zu einer gegebenen Matrix P , oder äquivalent zu einer Polynomfolge $\{p_m\}_{m \geq 0}$ eine weitere Folge $\{q_{m-1}\}_{m \geq 1}$ gemäß

$$(1.15) \quad q_{m-1}(z) := (1 - p_m(z))/(1 - z)$$

eingeführt; wegen $p_m(1) = 1$ ist q_{m-1} ein Polynom vom Grad $m - 1$, das die Funktion $1/(1 - z)$ in den Nullstellen $\xi_i^{(m)} (i = 1, \dots, m)$ von p_m interpoliert. Die Nullstellen $\xi_i^{(m)} (m \geq 1; 1 \leq i \leq m)$ bilden eine unendliche *Knotenmatrix* K_P ; jedes semiiterative Verfahren ist eindeutig durch $\{p_m\}_{m \geq 0}, \{q_{m-1}\}_{m \geq 1}$ oder durch K_P bestimmt (Lemma 2.1). Der durch (1.15) beschriebene Zusammenhang zwischen den Polynomfolgen $\{p_m\}_{m \geq 0}$ und $\{q_{m-1}\}_{m \geq 1}$ ermöglicht es uns, klassische Sätze aus der komplexen Approximationstheorie über die Konvergenz von Folgen von Interpolationspolynomen einzusetzen (vgl. z. B. Walsh [54] oder Gaier [17]), um für unser Problem geeignete Polynomfolgen $\{p_m\}_{m \geq 0}$ zu konstruieren. Für eine hinreichend allgemeine Klasse von Bereichen Ω (siehe (4.1)) läßt sich $\kappa(\Omega)$ explizit angeben (Satz 4.1); in bezug auf Ω asymptotisch optimale semiiterative Verfahren sind dadurch charakterisiert, daß die Folge $\{q_{m-1}\}_{m \geq 1}$ in Ω *maximal* gegen $1/(1 - z)$ *konvergiert* (Korollar 2 zu Satz 4.1). Eine hinreichende Bedingung für asymptotische Optimalität ist, daß die Knoten von K_P in Ω *gleichverteilt* sind (Satz 4.2). Da es für eine kompakte Menge Ω verschiedene Systeme gleichverteilter Knoten gibt (z. B. Fejér-, Fekete-, Leja-Knoten), existiert auch eine entsprechende Anzahl von bezüglich Ω asymptotisch optimaler semiiterativer Verfahren. Dazu gehören auch Verfahren, die von *verallgemeinerten Faberpolynomen* erzeugt werden; letztere zeichnen sich dadurch aus, daß sie nicht nur asymptotisch optim

sind, sondern auch – bei einer normalen Matrix T und einigermaßen glattem R von Ω – schon für $m \geq 3$ sich fast so gut verhalten wie die oben erwähnten optimalen Verfahren (Satz 5.2). Insgesamt ergibt sich damit eine befriedigende *analytische* Lösung der Aufgabe, asymptotisch optimale semiiterative Verfahren zu konstruieren; im weiteren wird die *algorithmische* Seite dieses Problems untersucht.

Eine Berechnung der transformierten Vektoren y_m nach (1.7) erfordert die explizite Bereitstellung der Elemente $\pi_{m,j}$ der Matrix P sowie die Speicherung aller Iterierten x_j ($j = 0, \dots, m$); beides ist bei großen Systemen nicht ökonomisch. Ist die Knotenmatrix K_P *spaltenkonstant*, so läßt sich y_m rekursiv aus y_{m-1} nach einer Formel berechnen, die einer *Richardson-Extrapolation 1. Art* entspricht (Satz 6.1). Genügen die Polynome p_m einer k -gliedrigen Rekursionsformel, so überträgt sich diese auf die y_m (Satz 6.2). Eine besonders günstige Klasse semi-iterativer Verfahren – in analytischer wie algorithmischer Hinsicht – stellen die in § 7 beschriebenen *Euler-Verfahren* dar: Zu jedem $\Omega \in \mathcal{M}$ (siehe (4.1)) gibt es ein asymptotisch optimales Verfahren (Satz 7.1), es existieren günstige Rekursionsformeln (Satz 7.2) und schließlich können sie auch von verallgemeinerten Faberpolynomen erzeugt werden (Satz 7.4), so daß die vorteilhafte Fehlerabschätzung der Sätze 5.1 und 5.2 angewandt werden kann. Die einfachste Summierungsmethode aus dieser Klasse ist das *Verfahren von Euler-Knopp* (vgl. Zeller-Beekmann [59, S. 130]); hier berechnet sich (nach Satz 7.2) y_m gemäß

$$(1.16) \quad y_m = \mu T y_{m-1} + (1 - \mu) y_{m-1} + \mu c.$$

Als Iterationsverfahren für lineare Gleichungssysteme ist (1.16) oft untersucht worden; ist T der Gesamtschrittoperator, so heißt es auch *Jacobi-Over-Relaxation* (JOR-Verfahren) (vgl. etwa Petryshyn [42], Niethammer [34], [35], Albrecht-Klein [1]). Ist $x = Tx + c$ eine lineare Fredholmsche Integralgleichung 2. Art, so entspricht (1.16) dem Iterationsverfahren von Wiarda [55] und Bückner [5]. Dort findet sich auch der historisch interessante Hinweis von G. G. Lorentz, daß es sich beim Verfahren von Wiarda eigentlich um die Anwendung des Euler-Knopp-Verfahrens auf die Neumannsche Reihe von T handelt. Dies nimmt Bellmann [3] zum Anlaß, die Anwendung allgemeiner Summierungsverfahren auf diese Reihe vorzuschlagen. Er schreibt dann „whether summability methods have any practical application or not is not clear“. Daß diese Frage heute positiv beantwortet werden kann, dies soll u. a. dieser Bericht zeigen.

In § 8 werden die vorausgehenden Ergebnisse auf das Beispiel 1.1 angewandt und mit numerischen Rechnungen belegt. Schließlich wird in § 9 noch auf Anwendungen dieser Methoden bei linearen Gleichungen in Banachräumen und bei nichtlinearen Gleichungssystemen eingegangen.

2 Semiiterative Methoden und Interpolationsverfahren

Wenden wir uns zunächst noch einmal der Vektorfolge $\{x_m\}_{m \geq 0}$ zu: Die *Residuenvektoren* $r_m := c - (I - T)x_m$, $m \geq 0$, die Gleichungen $x_m = Tx_m - r_m = x_{m-1} + r_{m-1}$ und $r_m = T^m r_0$ erfüllen, erhalten wir

$$(2.1) \quad \mathbf{x}_m = \mathbf{x}_0 + \sum_{j=0}^{m-1} \mathbf{r}_j = \mathbf{x}_0 + \left(\sum_{j=0}^{m-1} T^j \right) \mathbf{r}_0 \quad (m \geq 1).$$

Wegen (1.1) kann man die Lösung \mathbf{x} des gegebenen Systems in der Form $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + (I - T)^{-1} \mathbf{r}_0$ schreiben; ist $\rho(T) < 1$ gültig, so folgt daraus

$$(2.2) \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + (I - T)^{-1} \mathbf{r}_0 = \mathbf{x}_0 + \left(\sum_{j=0}^{\infty} T^j \right) \mathbf{r}_0 = \mathbf{x}_0 + \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{r}_j.$$

Ein Vergleich von (2.1) und (2.2) zeigt, daß $\{\mathbf{x}_m\}_{m \geq 0}$ gerade die Partialsummenfolge der Reihe (2.2) ist; oder anders formuliert: Die Iteration (1.2) besteht im wesentlichen darin, die *Neumannsche Reihe* $(I - T)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} T^j$ durch spezielle

Polynome in T , nämlich durch die Teilsummen $\left\{ \sum_{j=0}^{m-1} T^j \right\}_{m \geq 1}$, zu approximieren.

Man wird sich nun natürlich fragen, welche Art von Approximation für \mathbf{x} man erhält, wenn man in (2.1) die Polynome $\sum_{j=0}^{m-1} z^j$, $m \geq 1$, durch eine andere Polynomfolge $\{q_{m-1}(z)\}_{m \geq 1}$ ($\text{grad}(q_{m-1}) \leq m-1$) ersetzt, d. h. wenn man die Folge

$$(2.3) \quad \mathbf{y}_0 = \mathbf{x}_0; \quad \mathbf{y}_m = \mathbf{x}_0 + q_{m-1}(T) \mathbf{r}_0 \quad (m \geq 1)$$

betrachtet. Wir werden sehen, daß (2.3) eine semiiterative Methode in bezug auf (1.2) ist, und daß man umgekehrt jede semiiterative Methode in der Form (2.3) darstellen kann.

Führen wir die unendliche Matrix S mit ihrer Inversen S^{-1} gemäß

$$(2.4) \quad S := \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 1 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ -1 & 1 & & & \\ 0 & -1 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \end{bmatrix}$$

ein, so transformiert S die Glieder $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \dots\}$ der Reihe (2.2) in die Partialsummen $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots\}$ derselben Reihe. Induziert die Matrix P (1.6) nun eine semiiterative Methode, dann transformiert $Q := PS$ die Reihenglieder $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \dots\}$ direkt in die Folge $\{\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots\}$ von (1.7). Man sagt, daß Q die durch P definierte Transformation in „Reihe-Folge-Form“ darstellt (vgl. [59, S. 6]). Wegen (1.8) sind alle Elemente der ersten Spalte von Q gleich 1, d. h. Q ist von der Form

$$(2.5) \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & 0 \\ 1 & \gamma_{0,0} & & & & & & & \\ 1 & \gamma_{1,0} & \gamma_{1,1} & & & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & & & \\ 1 & \gamma_{m-1,0} & \gamma_{m-1,1} & \dots & \gamma_{m-1,m-1} & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & & & \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} &\gamma_{m,j} \in \mathbf{C} \\ &(m \geq 0, 0 \leq j \leq m). \end{aligned}$$

Die Koeffizienten der m -ten Zeile von Q definieren das Polynom

$$(2.6) \quad q_{m-1}(z) := \sum_{j=0}^{m-1} \gamma_{m-1,j} z^j \quad (m \geq 1).$$

Aus (1.7) und (2.1) schließt man durch eine einfache Rechnung, daß die Transformierten y_m der gegebenen semiiterativen Methode die Beziehung (2.3) erfüllen. Ist nun umgekehrt eine Vektorfolge der Form (2.3) – mit einer Polynomfolge $\{q_{m-1}\}_{m \geq 1}$, $\text{grad}(q_{m-1}) \leq m-1$ – gegeben, so kann man sich aus den Koeffizienten dieser Polynome eine unendliche Matrix Q der Gestalt (2.5) aufbauen. Die Zeilensummen der Dreiecksmatrix $P = QS^{-1}$ sind dann sämtlich gleich 1, so daß P eine semiiterative Methode bezüglich (1.2) definiert. Wegen (2.1) sieht man sofort, daß die zugehörigen Vektoren y_m von (1.7) gerade die Ausgangsvektoren $y_m = x_0 + q_{m-1}(T)r_0$ sind. Insgesamt erhalten wir

Lemma 2.1 ([9, Theorem 1]). *Sei P eine Matrix gemäß (1.6), die der Bedingung (1.8) genügt, und sei $Q := PS$ mit S nach (2.4). Sind $\{p_m\}_{m \geq 0}$ die in (1.10) und $\{q_{m-1}\}_{m \geq 1}$ die in (2.6) definierten Polynomfolgen, so gilt:*

$$(2.7) \quad q_{m-1}(z) = (1 - p_m(z))/(1 - z) \quad (m \geq 0); \quad q_{-1}(z) := 0;$$

$$(2.8) \quad p_m(z) = 1 - (1 - z)q_{m-1}(z) \quad (m \geq 0).$$

Ist $\xi_i^{(m)}$ ($i = 1, \dots, \ell$) eine Nullstelle von p_m mit der Vielfachheit k_i , dann folgt für die „geometrische Funktion“ $g(z) := 1/(1 - z)$

$$(2.9) \quad q_{m-1}^{(j)}(\xi_i^{(m)}) = g^{(j)}(\xi_i^{(m)}) = j!/(1 - \xi_i^{(m)})^{j+1} \quad (1 \leq i \leq \ell, 0 \leq j \leq k_i - 1)$$

d. h. q_{m-1} ist das eindeutig bestimmte Hermitesche Interpolationspolynom, das die Funktion g an den Nullstellen von p_m interpoliert.

Für die Näherungsvektoren y_m der durch P induzierten semiiterativen Methode

$$(2.10) \quad y_m = p_m(T)x_0 + q_{m-1}(T)c;$$

während sich die zugehörigen Fehler \tilde{e}_m (vgl. (1.9)) durch

$$(2.11) \quad \tilde{e}_m = [(I - T)^{-1} - q_{m-1}(T)]r_0$$

darstellen lassen.

Nun ist klar, daß man jede semiiterative Methode auch als ein *Interpolationsverfahren* der folgenden Form interpretieren kann (vgl. [6, § 7.3]):

Sei $y_0 = x_0$ ein beliebiger Startvektor.

Für jede natürliche Zahl m

– wählen wir m komplexe Knoten $\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \dots, \xi_m^{(m)}$; diese müssen nicht paarweise verschieden sein, aber wir fordern $\xi_i^{(m)} \neq 1$ für alle $1 \leq i \leq m$.

– Dann bestimmt man das zugehörige Hermitesche Interpolationspolynom q_{m-1} für $g(z) = 1/(1 - z)$.

– Schließlich ersetzt man in (2.2) die Matrix $(I - T)^{-1}$ durch $q_{m-1}(T)$, um eine Näherung $y_m = x_0 + q_{m-1}(T)r_0$ für die Lösung $x = x_0 + (I - T)^{-1}r_0$ von (1.1) zu erhalten.

Aus Lemma 2.1 folgt, daß eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen den semiiterativen Methoden (1.7) und den eben beschriebenen Interpolationsverfahren besteht. Definieren wir für eine gemäß (1.6) gegebene Transformationsmatrix P noch die *Knotenmatrix* $K_P = (\xi_i^{(m)})_{m \geq 1, 1 \leq i \leq m}$, wobei wir in der m -ten Zeile die Nullstellen $\xi_i^{(m)}$ von p_m entsprechend ihrer Vielfachheit aufführen, so ist eine semiiterative Methode offenbar eindeutig durch eine der drei unendlichen Dreiecksmatrizen $P, Q = PS$ (vgl. (2.5)) oder K_P definiert; die beiden anderen Matrizen lassen sich jeweils aus der gegebenen bestimmen.

Zum Abschluß dieses Paragraphen demonstrieren wir diese wechselseitige Beziehung zwischen semiiterativen Methoden, Summierungs- und Interpolationsverfahren an zwei klassischen Folgentransformationen.

Beispiel 2.2. Seien die Knoten $\xi_i^{(m)}, 1 \leq i \leq m$, der Matrix K_P die von $z = 1$ verschiedenen $(m + 1)$ -ten Einheitswurzeln, d. h. die $\xi_i^{(m)}$ sind gerade die Nullstellen von $(z^{m+1} - 1)/(z - 1) = 1 + z + \dots + z^m$. Für die Polynome p_m von (1.10) bedeutet dies $p_m(z) = (1 + z + \dots + z^m)/(m + 1)$ d. h. $\pi_{m,j} = 1/(m + 1), m \geq 0, 0 \leq j \leq m$. Durch die unendliche Dreiecksmatrix P mit diesen Koeffizienten wird das wohlbekannte *Cesàro-Verfahren* (C_1 -Verfahren) (vgl. [59, S. 100]) induziert. Die zugehörigen Vektoren $y_m = \frac{1}{m + 1} \sum_{j=0}^m x_j$ (nach (1.7)) sind die arithmetischen Mittel der Iterierten x_0, x_1, \dots, x_m .

Beispiel 2.3. Wenn man die Knoten der Matrix K_P identisch gleich $\xi \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ wählt so gilt mit $\mu := 1/(1 - \xi)$ (d. h. $-\xi/(1 - \xi) = 1 - \mu$)

$$\begin{aligned} p_m(z) &= \left(\frac{z - \xi}{1 - \xi} \right)^m = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \left(\frac{1}{1 - \xi} \right)^j \left(\frac{-\xi}{1 - \xi} \right)^{m-j} z^j \\ &= \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \mu^j (1 - \mu)^{m-j} z^j =: \sum_{j=0}^m \pi_{m,j} z^j. \end{aligned}$$

Die Matrix $P(\mu) := (\pi_{m,j})_{m \geq 0, 0 \leq j \leq m}$ induziert das *Euler-Knopp-Verfahren* ([59, S. 130], das wir bereits am Ende von § 1 erwähnten. Interessant ist, daß die Matrix $P(\mu)$ durch *einen* Parameter μ bestimmt ist, der dann auch in die einfache Formel (1.16) für die Berechnung der „Euler-Knopp-Transformierten“ y_m eingeht.

3 Konvergenz und Konvergenzgeschwindigkeit

Wir haben gesehen, daß eine semiiterative Methode durch eine der drei Matrizen P, Q und K_P eindeutig bestimmt ist. Nach welchen Kriterien sollen nun bei gegebenem T diese Matrizen, d. h. die Polynomfolgen $\{p_m\}_{m \geq 0}$ bzw. $\{q_{m-1}\}_{m \geq 1}$ gewählt werden? Im ersten Abschnitt haben wir schon erwähnt, daß $\tilde{e}_m = \mathbf{0}$, d. h. $y_m = x$, gilt, wenn das charakteristische Polynom von T ein Teiler von p_m ist; mit anderen Worten: wir haben in diesem Fall nach m Schritten die Lösung des linearen Gleichungssystems (1.1) erhalten. Da man bei Systemen mit großer Ordnung aber keineswegs n Iterationsschritte durchführen möchte, spielt die Möglichkeit,

daß ein Verfahren nach endlich vielen Schritten die exakte Lösung liefert, in der Praxis nur eine untergeordnete Rolle.

Mit Hilfe der Jordanschen Normalform von T (vgl. Gantmacher [18, S. und Lemma 2.1 läßt sich das folgende Konvergenzkriterium für semiiterative Methoden ableiten:

Lemma 3.1 ([9, Lemma 8]). *Sei*

$$(3.1) \quad m_T(z) = \prod_{i=1}^k (z - \tau_i)^{n_i} \quad (\tau_i \neq \tau_j \text{ für } i \neq j)$$

das Minimalpolynom der Matrix T . Ein semiiteratives Verfahren sei durch die Polynomfolgen $\{p_m\}_{m \geq 0}$ nach (1.10) oder $\{q_{m-1}\}_{m \geq 1}$ nach (2.7) gegeben. Dann sind die folgenden fünf Aussagen einander äquivalent:

(a) Die Folge $\{y_m\}_{m \geq 0}$ nach (1.7) konvergiert für jeden Startvektor y_0 gegen die Lösung x des Systems (1.1).

(b) $\lim_{m \rightarrow \infty} p_m(T) = 0$.

(c) $\lim_{m \rightarrow \infty} p_m^{(j)}(\tau_i) = 0$ für $1 \leq i \leq k$ und $0 \leq j \leq n_i - 1$.

(d) $\lim_{m \rightarrow \infty} q_{m-1}(T) = (I - T)^{-1}$.

(e) $\lim_{m \rightarrow \infty} q_{m-1}^{(j)}(\tau_i) = \left[\frac{d^j}{dz^j} \left(\frac{1}{1-z} \right) \right]_{z=\tau_i}$ für $1 \leq i \leq k$ und $0 \leq j \leq n_i - 1$.

Dieses Resultat scheint nur von theoretischem Interesse zu sein, da es Kenntnis der Eigenwerte von T voraussetzt. Weiß man allerdings, daß die Polynomfolge $\{p_m\}_{m \geq 0}$ gleichmäßig im Innern (d. h. auf jeder kompakten Teilmenge einer offenen Menge G gegen 0 strebt, und ist außerdem bekannt, daß das Spektrum von T in dieser Menge G enthalten ist, so folgt aus Lemma 3.1, daß die Näherungsvektoren y_m der induzierten semiiterativen Methode – für jedes $y_0 \in \mathbf{C}^n$ – gegen $x = (I - T)^{-1}c$ konvergieren.

Beispiel 3.2. Die semiiterative Methode, die dem Cesàro-Verfahren entspricht,

wird durch die Polynome $p_m(z) = \frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^m z^j$ definiert (vgl. Beispiel 2.2). Die

Polynome konvergieren gleichmäßig im Inneren von $D_1 := \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ gegen 0 und divergieren für jedes z mit $|z| > 1$. Mit anderen Worten $\rho(T) < 1$ impliziert, daß die Vektorfolge $\{y_m\}_{m \geq 0}$ für jeden Startvektor konvergiert und umgekehrt folgt aus der Konvergenz dieser Folge (für jedes y_0), daß $\rho(T) \leq 1$ gilt. Diese semiiterative Methode stellt also keine wesentliche „Verbesserung“ der Ausgangsiteration (1.2) dar.

Beispiel 3.3. Ganz anders verhält es sich mit der Anwendung eines Euler-Knopfverfahrens (Beispiel 2.3). Wir erhalten

$$\lim_{m \rightarrow \infty} p_m(z) = \lim_{m \rightarrow \infty} [(z - \xi)/(1 - \xi)]^m = 0$$

gleichmäßig im Innern von $D(\xi; |1 - \xi|) := \{z \in \mathbf{C} : |z - \xi| < |1 - \xi|\}$, oder $\lim_{m \rightarrow \infty} y_m = x$ falls $\sigma(T) \subseteq D(\xi; |1 - \xi|)$ gilt.

Um die Qualität der Konvergenz einer von P induzierten semiiterativen Methode beurteilen zu können, führen wir in Analogie zu (1.4) die Größe

$$(3.2) \quad \kappa(T, P) := \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\sup_{e_0 \neq 0} \frac{\|\tilde{e}_m\|}{\|e_0\|} \right]^{1/m}$$

ein und nennen sie den *asymptotischen Konvergenzfaktor von T bezüglich P*. Bei Ortega-Rheinboldt [40, S. 288] heißt $\kappa(T, P)$ „root-convergence-factor“; dort wird auch gezeigt, daß $\kappa(T, P)$ normunabhängig ist.

Wegen $\tilde{e}_m = p_m(T)e_0$ kann man aus der Jordanschen Normalform von $p_m(T)$ das folgende Lemma ableiten:

Lemma 3.4. *Ist m_T nach (3.1) das Minimalpolynom von T, so gilt für beliebiges P*

$$(3.3) \quad \kappa(T, P) = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \left\{ \max_{1 \leq i \leq k} \max_{0 \leq j \leq n_i - 1} |p_m^{(j)}(\tau_i)|^{1/m} \right\}.$$

Wenn T diagonalisierbar ist, so folgt daraus

$$(3.3a) \quad \kappa(T, P) = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \left\{ \max_{\tau \in \sigma(T)} |p_m(\tau)|^{1/m} \right\}.$$

Natürlich läßt sich $\kappa(T, P)$ auch über die Folge der Interpolationspolynome $\{q_{m-1}\}_{m \geq 1}$ charakterisieren (vgl. [9, Lemma 10]).

Auch dieses Ergebnis ist nur theoretisch verwendbar, weil es wiederum eine genaue Kenntnis des Spektrums $\sigma(T)$ voraussetzt. Durchaus realistisch ist dagegen die Annahme, daß ein kompakter Bereich $\Omega \subset \mathbb{C}$ mit $\sigma(T) \subseteq \Omega$ bekannt ist; z. B. läßt sich häufig nach dem Satz von Bendixson (vgl. etwa Householder [25, S. 69]) ein Rechteck angeben, das die Eigenwerte einer Matrix enthält. Da nach Voraussetzung die Koeffizientenmatrix $I - T$ des Systems (1.1) nichtsingulär, also $1 \notin \sigma(T)$ ist, werden wir $1 \notin \Omega$ annehmen.

Damit ergibt sich das Problem, ein bezüglich der Information $\sigma(T) \subseteq \Omega$ möglichst günstiges Verfahren, d. h. ein Verfahren mit minimalem asymptotischen Konvergenzfaktor zu finden. Man kann sogar noch weitergehen und versuchen, in jedem „Semiiterations-Schritt“ m eine maximale Verringerung der Fehlernorm $\|\tilde{e}_m\|_2 := (\tilde{e}_m^T \tilde{e}_m)^{1/2}$ zu erreichen. Ist T normal, so führt dies nach (3.3a) zum Minimierungsproblem

$$(3.4) \quad \min_{z \in \Omega} \{ \max |p_m(z)| : p_m \in \Pi_m \text{ und } p_m(1) = 1 \};$$

hier bezeichnet Π_m die Menge aller Polynome mit komplexen Koeffizienten vom Grad kleiner oder gleich m. Ein klassisches Ergebnis der komplexen Analysis (vgl. Smirnov-Lebedev [49, S. 367]) besagt, daß (3.4) für jedes m eine Lösung p_m^* besitzt. Die Koeffizienten dieser Polynome $\{p_m^*\}_{m \geq 0}$ bilden eine Matrix P^* , die allerdings nur für spezielle Bereich Ω explizit bekannt ist. Ist Ω ein reelles Intervall $[\alpha, \beta]$, so erweisen sich auf $[\alpha, \beta]$ transformierte und auf $p_m(1) = 1$ normierte Tschebyscheff-Polynome erster Art als Lösung von (3.4) ([53, S. 135]). Ist Ω das abgeschlossene Innengebiet einer Ellipse mit den reellen Brennpunkten α und β , so erhält man dasselbe Ergebnis (Manteuffel [32]). Freund-Ruscheweyh [15] lösen (3.4), wenn Ω ein Intervall parallel zur imaginären Achse ist; de Boor-Rice [4] berechnen p_m^* mit Hilfe eines Algorithmus vom Remez-Typ, wenn Ω aus zwei disjunkten reellen Intervallen besteht. Nachdem es unser erklärtes Ziel

ist, ein für allgemeinere Bereiche Ω möglichst gut geeignetes Verfahren zu finden. beschränken wir uns darauf, asymptotisch optimale Methoden zu konstruieren.

Durch (3.3a) motiviert führen wir dazu den *asymptotischen Konvergenzfaktor*

$$(3.5) \quad \kappa(\Omega, P) := \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \{ \max_{z \in \Omega} |p_m(z)|^{1/m} \}$$

von Ω bezüglich P ein. Definieren wir ferner die Klasse

$$(3.6) \quad P := \{ P = (\pi_{m,j})_{m \geq 0, 0 \leq j \leq m} : \pi_{m,j} \in \mathbf{C}, \sum_{j=0}^m \pi_{m,j} = 1 \text{ für } m \geq 0 \}$$

aller unendlichen Dreiecksmatrizen, die ein semiiteratives Verfahren erzeugen, so nennen wir

$$(3.7) \quad \kappa(\Omega) := \inf_{P \in \mathbf{P}} \kappa(\Omega, P)$$

den *asymptotischen Konvergenzfaktor* von Ω .

Beispiel 3.5. Kehren wir zu unserem Testproblem (Beispiel 1.1) zurück: Wir haben gesehen, daß das Spektrum des Gesamtschrittoperators T in einem Rechteck $\Omega = R_{\alpha, \beta}$ ($1 \notin R_{\alpha, \beta}$) enthalten ist. Kann man nun ein semiiteratives Verfahren das einem Euler-Knopp-Summierungsverfahren entspricht (vgl. Beispiel 2.3, 3.3) einsetzen, um entweder Konvergenz zu erzwingen oder die Konvergenzgeschwindigkeit zu erhöhen? Mit den Bezeichnungen aus Beispiel 2.3 gilt

$$(3.8) \quad \kappa(\Omega, P(\mu)) = \max_{z \in \Omega} |(z - (1 - \mu)^{-1}) / (1 - (1 - \mu)^{-1})|.$$

Da die Matrix T aus Beispiel 1.1 diagonalisierbar ist, folgt aus (3.3a) $\kappa(T, P(\mu)) \leq \kappa(\Omega, P(\mu))$. Es ist einfach zu sehen, daß in unserem Fall sogar Gleichheit herrscht. Die rechte Seite von (3.8) wird für $\alpha < \alpha^2 + \beta^2$ durch die Wahl

$$(3.9) \quad \hat{\mu} := (1 - \alpha) / ((1 - \alpha)^2 + \beta^2)$$

minimiert, und wir erhalten

$$\kappa(\Omega, P(\hat{\mu})) = \kappa(T, P(\hat{\mu})) = \beta / \sqrt{(1 - \alpha)^2 + \beta^2}.$$

Ist $1 > \alpha \geq \alpha^2 + \beta^2$, so wird $\hat{\mu} := 1$ (vgl. Yeyios [56]). Nun ist $P(1)$ aber die unerechte Einheitsmatrix, so daß wir hier durch kein Euler-Knopp-Verfahren eine Konvergenzbeschleunigung erzielen können.

Für $h = 0,1$ (d. h. $\alpha = 0,4755$) und verschiedene Werte von λ (siehe Beispiel 1.1) zeigt Tabelle 1, daß die Anwendung dieser semiiterativen Methode ein

Tabelle 1

λ	β	$\rho(T)$	$\kappa(T, P(\hat{\mu}))$
1,25	0,3566	0,5944	0,5944
2,5	1,090	1,189	0,9011
10	4,731	4,755	0,9939
250	118,9	118,9	0,99999

Erhöhung der Konvergenzgeschwindigkeit bedeuten kann. Wir werden später allerdings sehen, daß es viel günstigere Verfahren für unser Testproblem gibt.

4 Asymptotisch optimale semiiterative Methoden

Wir nennen eine semiiterative Methode, induziert durch $\tilde{P} \in \mathbf{P}$, *asymptotisch optimal bezüglich* (der kompakten Menge) Ω , wenn $\kappa(\Omega, \tilde{P}) = \kappa(\Omega)$ erfüllt ist. Die Matrix P^* , die zu den Lösungen p_m^* , $m \geq 0$, des Minimierungsproblems (3.4) gehört, induziert offensichtlich ein asymptotisch optimales semiiteratives Verfahren. Die Frage ist, ob es neben P^* noch andere Matrizen $P \in \mathbf{P}$ gibt, die auch zu einer asymptotisch optimalen Methode führen, aber gleichzeitig leichter zugänglich sind als P^* .

Um solche unendlichen Dreiecksmatrizen P zu konstruieren, führen wir die folgende Klasse kompakter Mengen $\Omega \subseteq \mathbf{C}$ ein (dabei sei $\bar{\mathbf{C}} := \mathbf{C} \cup \{\infty\}$):

$$(4.1) \quad \mathbf{M} := \{ \Omega \subseteq \mathbf{C} : \Omega \text{ ist kompakt, } 1 \notin \Omega, \bar{\mathbf{C}} \setminus \Omega \text{ ist einfach zusammenhängend, } \Omega \text{ enthält mehr als einen Punkt} \}.$$

Nach dem Riemannschen Abbildungssatz existiert für jedes $\Omega \in \mathbf{M}$ eine konforme Surjektion

$$(4.2) \quad \psi: \bar{\mathbf{C}} \setminus \{w : |w| \leq 1\} \rightarrow \bar{\mathbf{C}} \setminus \Omega$$

mit

$$(4.3) \quad \psi(\infty) = \infty \quad \text{und} \quad \psi'(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} \psi(z)/z =: \gamma(\Omega) > 0.$$

Die Konstante $\gamma(\Omega)$ heißt die *Kapazität von Ω* (vgl. Walsh [54, S. 74]). Wegen $1 \notin \Omega$ gibt es genau eine Zahl $\hat{w} \in \mathbf{C}$ mit

$$(4.4) \quad \psi(\hat{w}) = 1, \quad \hat{\eta} := |\hat{w}| > 1.$$

Nun wissen wir, daß jede semiiterative Methode nicht nur durch die Matrix $P \in \mathbf{P}$, sondern auch durch die zugehörige „Reihe-Folge-Matrix“ $Q = PS$ (vgl. (2.5)) eindeutig festgelegt ist. Die Polynome $\{q_{m-1}\}_{m \geq 1}$, die aus den Koeffizienten dieser Matrix Q gebildet werden können (vgl. (2.6)), haben wir als eine Folge von Interpolationspolynomen für die Funktion $g(z) = 1/(1-z)$ identifiziert. Wegen (2.7) und weil $1 \notin \Omega$ gilt, kann $\kappa(\Omega)$ anstatt durch (3.7) auch durch

$$(4.5) \quad \kappa(\Omega) = \inf_{\{q_{m-1}\}_{m \geq 1}} \{ \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} [\max_{z \in \Omega} |1/(1-z) - q_{m-1}(z)|^{1/(m-1)}] \}$$

definiert werden; dabei läuft $\{q_{m-1}\}_{m \geq 1}$ über alle Polynomfolgen mit $\text{grad}(q_{m-1}) \leq m-1$. Aus der Approximationstheorie ist bekannt, daß die Infima aus (3.7) und (4.5) angenommen werden. Mit anderen Worten: Wir können bei unserer Suche nach asymptotisch optimalen Verfahren entweder Polynomfolgen $\{p_m\}_{m \geq 0}$ bestimmen, die – unter der Nebenbedingung $p_m(1) = 1$ – auf Ω die Nullfunktion asymptotisch optimal approximieren, oder wir können Folgen $\{q_{m-1}\}_{m \geq 1}$ konstruieren, die die Funktion $g(z) = 1/(1-z)$ auf Ω asymptotisch optimal approximieren. Letzteres ist jedoch eine klassische Fragestellung der Approximationstheorie im Komplexen. Wir erhalten direkt

Satz 4.1 (siehe Walsh [54, Chap. 4, Theorem 7]). Für $\Omega \in \mathbf{M}$ gilt

$$(4.6) \quad \kappa(\Omega) = 1/\hat{\eta} \quad \text{mit } \hat{\eta} \text{ nach (4.4).}$$

In der „Sprache der semiiterativen Methoden“ lautet dieses Ergebnis:

Korollar 1 (zu Satz 4.1). Eine semiiterative Methode, induziert durch $P \in \mathbf{P}$, ist genau dann asymptotisch optimal für $\Omega \in \mathbf{M}$, wenn $\kappa(\Omega, P) = 1/\hat{\eta}$ ist.

Eine Folge $\{q_{m-1}\}_{m \geq 1}$, für die in (4.5) das Minimum angenommen wird, konvergiert maximal auf Ω gegen $g(z) = 1/(1-z)$ ([54, S. 79]). Damit ergibt sich das überaus nützliche

Korollar 2 (zu Satz 4.1). Eine semiiterative Methode ist genau dann asymptotisch optimal für Ω , wenn die Folge $\{q_{m-1}\}_{m \geq 1}$ der zugehörigen Interpolationspolynome auf Ω maximal gegen $g(z) = 1/(1-z)$ konvergiert.

Da maximale Konvergenz beim Differenzieren erhalten bleibt (siehe [54, Chap. 4, Theorem 9]), schließen wir aus Lemma 3.4 für eine beliebige, nicht notwendigerweise diagonalisierbare Matrix T :

Korollar 3 (zu Satz 4.1). Induziert $P \in \mathbf{P}$ eine asymptotisch optimale semiiterative Methode für $\Omega \in \mathbf{M}$, und ist $\sigma(T) \subseteq \Omega$, so gilt

$$(4.7) \quad \kappa(T, P) = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \left[\sup_{e_0 \neq 0} \frac{\|\tilde{e}_m\|}{\|e_0\|} \right]^{1/m} \leq \frac{1}{\hat{\eta}}.$$

Es läßt sich sogar sehr viel mehr zeigen: Für die Mengen

$$(4.8) \quad \Omega_\eta := \bar{\mathbf{C}} \setminus \psi(\{w \in \bar{\mathbf{C}} : |w| > \eta\}) \quad (\eta \geq 1)$$

gilt offensichtlich $\Omega_\eta \in \mathbf{M}$ und $\kappa(\Omega_\eta) = \eta/\hat{\eta}$, falls $\eta < \hat{\eta}$.

Korollar 4 (zu Satz 4.1). Ist ein semiiteratives Verfahren asymptotisch optimal für $\Omega \in \mathbf{M}$, so auch bezüglich aller Mengen Ω_η mit $1 \leq \eta < \hat{\eta}$.

Maximale Konvergenz kann auch durch die Lage der Knoten $\xi_i^{(m)}$ der Interpolationsmatrix K_p (vgl. Abschnitt 2) beschrieben werden: Die Knoten $\xi_i^{(m)}$ ($m \geq 1$, $1 \leq i \leq m$) von K_p heißen gleichverteilt auf $\Omega \in \mathbf{M}$ (siehe [17, S. 65]), wenn

(i) kein Häufungspunkt der Menge $\{\xi_i^{(m)}\}$ in $\bar{\mathbf{C}} \setminus \Omega$ liegt, und wenn

$$(ii) \quad \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \left\{ \max_{z \in \Omega} \left[\prod_{i=1}^m |z - \xi_i^{(m)}| \right]^{1/m} \right\} = \gamma(\Omega) \text{ gilt,}$$

wobei $\gamma(\Omega)$ die Kapazität von Ω ist (vgl. (4.3)).

Der folgende Satz ist eine direkte Folgerung aus dem Satz von Kalmár und Walsh (siehe Gaier [17, S. 66]) sowie der Dualität zwischen Interpolations- und semiiterativen Verfahren, die in Abschnitt 2 beschrieben wurde:

Satz 4.2 [8, Theorem 6]. Sind die Knoten von K_p gleichverteilt auf $\Omega \in \mathbf{M}$, so ist die zugehörige semiiterative Methode asymptotisch optimal für Ω .

Für eine gegebene Menge $\Omega \in \mathbf{M}$ gibt es viele verschiedene Systeme von gleichverteilten Knoten: Beispiele wie etwa die Fejér-Knoten und die Fekete-

Knoten werden bei Gaier [17, S. 68 ff.] beschrieben, andere wie z. B. die Leja-Knoten werden erwähnt.

Nach Satz 4.1 wissen wir, daß für $\Omega \in \mathbf{M}$ der Konvergenzfaktor positiv ist d. h. wir können keine semiiterative Methode finden, die die Eigenschaften hat, daß für alle T mit $\sigma(T) \subseteq \Omega$ die Folge $\{y_m\}_{m \geq 0}$ überlinear, d. h. mit Konvergenzfaktor 0 konvergiert. Andererseits können wir im Prinzip mehrere Verfahren angeben, die bezüglich Ω asymptotisch optimal sind, z. B. solche, die von auf Ω gleichverteilten Knoten erzeugt werden.

Eine weitere wichtige Eigenschaft des Konvergenzfaktors ist seine „Monotonie“, die in dem nun folgenden Vergleichssatz präziser formuliert wird:

Satz 4.3 [9, Theorem 16]. *Gilt für die Mengen $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathbf{M}$ die Inklusion $\Omega_1 \subset \Omega_2$ so folgt $\kappa(\Omega_1) < \kappa(\Omega_2)$.*

Diese Aussage ist eine Konsequenz aus dem Schwarzschen Lemma (vgl. [38, Theorem 3]).

Wir wollen noch darauf hinweisen, daß sich alle Ergebnisse dieses Abschnitts auch unter wesentlich schwächeren Voraussetzungen an Ω beweisen lassen. Es genügt zu fordern, daß das Komplement von Ω eine Greensche Funktion G mit Pol in ∞ besitzt; dies ist beispielsweise gewährleistet, wenn $\bar{\mathbf{C}} \setminus \Omega$ n -fach zusammenhängend ist, und Ω keine isolierten Punkte enthält (Lebesgue-Osgood Bedingung, vgl. Walsh [54, Section 4.1]). Dann läßt sich zeigen, daß

$$\kappa(\Omega) = \exp(-G(1))$$

gilt.

Abschließend wollen wir ein asymptotisch optimales Verfahren für Kreisscheiben angeben:

Beispiel 4.4. Ist $\Omega = \bar{D}(\xi, \nu) := \{z \in \mathbf{C} : |z - \xi| \leq \nu\} \in \mathbf{M}$, so ist $\psi(w) = \nu z + \xi$ offenbar die konforme Abbildung ψ nach (4.2) und (4.3). Wegen $\psi((1 - \xi)/\nu) = 1$ gilt $\kappa(\Omega) = \nu/|1 - \xi|$. Für die semiiterative Methode aus Beispiel 3.5 gilt aber $\kappa(\bar{D}(\xi, \nu), P(\mu)) = \max_{z \in \bar{D}(\xi, \nu)} |(z - \xi)/(1 - \xi)| = \nu/|1 - \xi|$ ($\mu = 1/(1 - \xi)$ vgl. Beisp. 2.3),

so daß $P(\mu)$ ein asymptotisch optimales semiiteratives Verfahren für die Kreisscheibe $\bar{D}(\xi, \nu)$ induziert. Wegen $\gamma(\bar{D}(\xi, \nu)) = \nu$ ist auch klar, daß die Knoten $\xi_i^{(m)} = \xi$ ($m \geq 1, 1 \leq i \leq m$) gleichverteilt auf $\bar{D}(\xi, \nu)$ sind.

5 Von Faberentwicklungen erzeugte semiiterative Methoden

Sei Ω eine kompakte Menge aus der Klasse \mathbf{M} nach (4.1). Im letzten Abschnitt haben wir zwei Möglichkeiten beschrieben, wie man asymptotisch optimale Verfahren bezüglich Ω konstruieren kann: Einmal können wir gleichverteilte Knoten verwenden, zum anderen erzeugt jede Polynomfolge $\{q_{m-1}\}_{m \geq 1}$ die auf Ω maximal gegen $g(z) = 1/(1 - z)$ konvergiert, ein solches Verfahren. Wir werden nun diesen zweiten Ansatz näher analysieren.

In der Approximationstheorie kennt man viele Wege, maximal konvergente Polynomfolgen zu konstruieren. Gragg-Reichel [20] betrachten orthogonale Polynome bezüglich des Randes $\partial\Omega$ von Ω und einer geeigneten Gewichtsfunktion.

Interpolation in den Nullstellen dieser Polynome erzeugt – unter einigen Voraussetzungen an $\partial\Omega$ – maximale Konvergenz und damit asymptotisch optimale Methoden. Dasselbe gilt, wenn man von den zugehörigen „Kernel polynomials“ ausgeht (vgl. Smolarski-Saylor [50]). Wir werden hier eine weitere wohlbekannte Klasse von Polynomen, nämlich *Faberpolynome*, auf ihre Brauchbarkeit bei der Konstruktion semiiterativer Methoden untersuchen.

Dazu benötigen wir einige Definitionen: Im letzten Abschnitt spielte die konforme Surjektion

$$\begin{aligned}\psi: \bar{\mathbb{C}} \setminus \{w: |w| \leq 1\} &\rightarrow \bar{\mathbb{C}} \setminus \Omega, \\ \psi(\infty) = \infty, \quad \psi'(\infty) &= \gamma(\Omega),\end{aligned}$$

(vgl. (4.2), (4.3)) eine wichtige Rolle. Wir normalisieren ψ durch $\hat{\psi}(w) := \psi(w/\gamma(\Omega))$: $\bar{\mathbb{C}} \setminus \{w: |w| \leq \gamma(\Omega)\} \rightarrow \bar{\mathbb{C}} \setminus \Omega$. $\hat{\psi}$ kann in eine Laurentreihe der Form

$$(5.1) \quad \hat{\psi}(w) = w + \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j w^{-j}, \quad |w| > \gamma(\Omega),$$

entwickelt werden. Ist $\hat{\Phi}$ die Umkehrabbildung von $\hat{\psi}$, so bezeichnen wir für $\tau > \gamma(\Omega)$ das Bild des Kreises $\{w: |w| = \tau\}$ unter $\hat{\psi}$ mit $\hat{\Gamma}_\tau$, also $\hat{\Gamma}_\tau := \{z: |\hat{\Phi}(z)| = \tau\}$. Ferner sei $\hat{\Omega}_\tau$ die kompakte Menge, die $\hat{\Gamma}_\tau$ als Rand besitzt. (Zwischen diesen Mengen und den Mengen Ω_τ nach (4.8) besteht die Beziehung $\Omega_\tau = \hat{\Omega}_{\gamma(\Omega)\tau}$.) Außerdem sei

$$(5.2) \quad \chi(w) := \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j w^{-j}$$

eine in $\{w: |w| > \gamma(\Omega)\}$ holomorphe Funktion mit $\chi(\infty) = \gamma_0 \neq 0$, die in $|w| > \gamma$ keine Nullstellen besitzt.

Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ besitzt die Funktion $\chi(\hat{\Phi}(z))[\hat{\Phi}(z)]^k$ eine Laurentreihe

$$(5.3) \quad \chi(\hat{\Phi}(z))[\hat{\Phi}(z)]^k = \gamma_0 z^k + \sum_{j=-\infty}^{k-1} \beta_{k,j} z^j$$

in einer Umgebung von ∞ . Der Hauptteil dieser Reihe

$$(5.4) \quad F_k(z; \chi) := \gamma_0 z^k + \sum_{j=0}^{k-1} \beta_{k,j} z^j$$

ist ein Polynom vom genauen Grad k und heißt *k-tes verallgemeinertes Faberpolynom für Ω bezüglich der Gewichtsfunktion χ* ; für $\chi \equiv 1$ ist F_k das (gewöhnliche) k -te Faberpolynom für Ω (siehe Faber [11], [12]).

Diese Polynome spielen in der Approximationstheorie deshalb eine wichtige Rolle, weil für $\tau > \gamma(\Omega)$ jede Funktion, die im Innern von Γ_τ holomorph ist, nach Faberpolynomen entwickelt werden kann. Wir wollen semiiterative Methoden konstruieren und sind daher nur an der Approximation von $g(z) = 1/(1-z)$ interessiert. Außerdem beschränken wir unsere Untersuchung auf die spezielle Gewichtsfunktion

$$(5.5) \quad \chi(w) = 1/\hat{\psi}'(w),$$

die offensichtlich die an χ gestellten Forderungen erfüllt. Diese Einschränkung ist keineswegs notwendig, erscheint uns aber aus den folgenden Gründen zweckmäßig: Wie wir später sehen, kann man mit Hilfe der Polynome $F_k(z; 1/\psi')$ ein semiiteratives Verfahren konstruieren, dessen Vektorfolge $\{y_m\}$ sich durch eine stationäre Rekursion berechnen läßt. Es wird sich auch herausstellen, daß diese Verfahren den wohlbekannten Euler-Verfahren (vgl. Abschnitt 7) entsprechen. Dieser Zusammenhang führt auf neue Resultate über Euler-Verfahren.

Ist also $\hat{F}_k(z) := F_k(z; 1/\psi')$ und

$$(5.6) \quad 1/(1-z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k \hat{F}_k(z), \quad z \in \Omega,$$

die Entwicklung von $g(z) = 1/(1-z)$ nach diesen Faberpolynomen, so approximieren wir g durch die Teilsummen von (5.6)

$$q_{m-1}(z) := \sum_{k=0}^{m-1} \sigma_k \hat{F}_k(z) \quad (m \geq 1).$$

Diese Folge $\{q_{m-1}\}_{m \geq 1}$ induziert durch

$$(5.7) \quad y_0 = x_0; \quad y_m = x_0 + q_{m-1}(T)r_0 \quad (m \geq 1)$$

(siehe (2.3)) eine semiiterative Methode bezüglich (1.2).

Da Faberentwicklungen unter den gegebenen Voraussetzungen maximal konvergieren (vgl. Smirnov-Lebedev [49, 2.1.3, 2.2.2]), schließen wir aus Korollar zu Satz 4.1, daß durch (5.7) sogar eine für Ω asymptotisch optimale semiiterative Methode definiert wird, oder anders formuliert, daß die zu (5.7) gehörende Fehlerfolge asymptotisch wie $\kappa(\Omega)^m$ gegen den Nullvektor strebt.

Besitzt ein durch P induziertes semiiteratives Verfahren den asymptotischen Konvergenzfaktor $\kappa(T, P)$, so besagt dies, daß die Norm $\|\tilde{e}_m\|$ des Fehlers asymptotisch in jedem Schritt mit dem Faktor $\kappa(T, P)$ multipliziert wird; damit ist aber noch keineswegs gesagt, daß dieses Verhalten schon für kleine Werte von m vorliegt. So haben für $q \in \mathbf{C}$ die Folgen $\{q^m\}_{m \geq 0}$ und $\{m^k q^m\}_{m \geq 0}$ für festes $k \in \mathbf{N}$ den gleichen asymptotischen Konvergenzfaktor $|q|$. Trotzdem wird für $|q| < 1$ die zweite Folge eine vorgegebene Schranke $\epsilon > 0$ erst sehr viel später als die erste erreichen. Zwei in bezug auf $\Omega \in \mathbf{M}$ asymptotisch optimale Verfahren können sich also im Verhalten der Fehler zu Beginn der Rechnung sehr wohl unterscheiden. Die nächsten Sätze besagen nun, daß sich semiiterative Verfahren, die auf die oben beschriebene Weise von verallgemeinerten Faberpolynomen erzeugt werden, in dieser Hinsicht besonders günstig verhalten:

Satz 5.1 (vgl. [7]). *Ist die Matrix T normal, so gilt für die Vektorfolge $\{y_m\}_{m \geq 0}$, die durch die Teilsummen der Faberentwicklung (5.6) erklärt ist, die folgende Fehlerabschätzung:*

$$(5.8) \quad \|x - y_m\|_2 \leq (\max_{z \in \Omega} |1-z|) \frac{e}{\gamma(\Omega)} \frac{m-1-m\kappa(\Omega)}{(1-\kappa(\Omega))^2} [\kappa(\Omega)]^{m+1} \|x - y_0\|_2.$$

Zum Beweis von (5.8) benötigen wir

$$\max_{z \in \Omega} |\hat{F}_k(z)| \leq e(k+1) [\gamma(\Omega)]^k \quad (k \geq 0),$$

was beispielsweise in [49, 2.2.1] gezeigt wird. Dort wird auch darauf hingewiesen, daß man die Konstante e in dieser Ungleichung durch keine Zahl kleiner als 1 ersetzen kann¹): Elementare Abschätzungen (ein analoges Vorgehen findet man in [9, § 7]) liefern für die Teilsummen q_{m-1} von (5.6)

$$\max_{z \in \Omega} \left| \frac{1}{1-z} - q_{m-1}(z) \right| \leq \frac{e}{\gamma(\Omega)} \frac{m-1 - m\kappa(\Omega)}{(1-\kappa(\Omega))^2} [\kappa(\Omega)]^{m+1} \quad (m \geq 1)$$

woraus sich (5.8) mit Hilfe von (1.9) und (2.8) ableiten läßt.

Wegen der Äquivalenz der Normen im \mathbf{C}^n kann man Abschätzungen vom Typ (5.8) natürlich nicht nur für die Euklidische Vektornorm $\|y\|_2 := (y^H y)^{1/2}$, $y \in \mathbf{C}^n$, sondern für jede beliebige Norm beweisen. Ist der Rand $\partial\Omega$ von Ω „genügend glatt“, so läßt sich noch mehr zeigen. Sei $\theta(s)$ ($0 \leq s \leq \ell$) eine Parametrisierung von $\partial\Omega$ bezüglich der Bogenlänge ℓ . $\partial\Omega$ gehört der Klasse $C(p, \alpha)$ an, wenn θ p -mal stetig differenzierbar ist und $\theta^{(p)}$ einer Lipschitz-Bedingung der Form $|\theta^{(p)}(s) - \theta^{(p)}(s')| \leq \lambda |s - s'|^\alpha$ ($0 \leq s, s' \leq \ell$) mit einer Konstanten λ genügt.

Satz 5.2 [9, Theorem 22]. *Ist*

$$E_m(g, \Omega) := \min_{z \in \Omega} \{ \max_{z \in \Omega} |g(z) - q_m(z)| : q_m \in \Pi_m \text{ (vgl. (3.4))} \}$$

der Fehler der gleichmäßigen polynomischen Bestapproximation vom Grad m der Funktion $g(z) = 1/(1-z)$ auf Ω , gehört $\partial\Omega$ zur Klasse $C(1, \epsilon)$ und ist T n -mal, so gilt die folgende Verschärfung von (5.8)

$$(5.9) \quad \|x - y_m\| \leq L \ln(m-1) E_{m-1}(g, \Omega) \|x - y_0\| \quad (m \geq 3).$$

Hier bezeichnet $\|\cdot\|$ eine beliebige Vektornorm im \mathbf{C}^n , und L ist eine von m unabhängige Konstante.

6 Algorithmen

In den letzten Abschnitten haben wir eine Reihe analytischer Ergebnisse über semiiterative Methoden zusammengestellt; jetzt suchen wir geeignete Algorithmen, um die zugehörige Vektorfolge $\{y_m\}_{m \geq 0}$ berechnen zu können. Es geht also um die Frage, wie man für eine gegebene Matrix $P \in \mathbf{P}$ (vgl. (1.6)) die Vektoren

$$(6.1) \quad y_m = \sum_{j=0}^m \pi_{m,j} x_j \quad (m \geq 0)$$

bestimmt, wobei x_j ($j \geq 0$) die Iterierten aus (1.2) bezeichnen. Natürlich könnte man dazu die Formel (6.1) direkt verwenden; dann müßte man allerdings alle Elemente $\pi_{m,j}$ ($m \geq 0$, $0 \leq j \leq m$) von P bereitstellen und alle Iterierten x_j ($0 \leq j \leq m$) speichern – ein ziemlich aufwendiges Vorgehen. Häufig ist die Matrix P durch wenige Daten bestimmt, aus denen dann das Dreiecksschema der Koeffizienten $\pi_{m,j}$ aufgebaut wird (vgl. Beispiel 2.3; dort hängt P nur von einem Parameter a ab). In dieser Situation wird man versuchen, eine Rechenvorschrift für die y_m zu finden.

¹) Nachdem L. deBranges 1984 die Bieberbachsche Vermutung bewiesen hat, läßt sich die Konstante e hier und in der Fehlerabschätzung (5.8) durch 1 ersetzen.

den, bei der auf die explizite Bestimmung der $\pi_{m,j}$ verzichtet werden kann. Außerdem wird man eine rekursive Berechnung der y_m anstreben: Wünschenswert wäre es, wenn man y_m aus den letzten k Näherungen $y_{m-1}, y_{m-2}, \dots, y_{m-k}$ konstruieren könnte.

Wie wir im zweiten Abschnitt gesehen haben, ist eine semiiterative Methode auch durch die Vorgabe einer Knotenmatrix $K_P = (\xi_i^{(m)})_{m \geq 1, 1 \leq i \leq m}$ festgelegt. Wir nennen K_P *spaltenkonstant*, wenn in jeder Spalte von K_P durchgehend derselbe Knoten auftritt, wenn also gilt:

$$(6.2) \quad \xi_i^{(m)} = \xi_i \quad \text{für alle } m \geq i \text{ und } i \geq 1.$$

Satz 6.1 [8, Theorem 5]. *Ist die Knotenmatrix K_P spaltenkonstant, so lassen sich die Vektoren y_m von (6.1) der von K_P induzierten semiiterativen Methode wie folgt berechnen:*

$$(6.3) \quad y_m = y_{m-1} + \mu_m [c - (I - T)y_{m-1}] \quad (m \geq 1) \quad \text{oder}$$

$$(6.3') \quad y_m = [\mu_m T + (1 - \mu_m)I]y_{m-1} + \mu_m c \quad (m \geq 1).$$

Dabei sind die Parameter μ_m durch die Knoten ξ_m über

$$(6.4) \quad \mu_m = 1/(1 - \xi_m)$$

bestimmt.

Zum Beweis des Satzes 6.1 verwendet man neben der Darstellung (2.10) der Vektoren y_m aus Lemma 2.1 vor allem, daß bei einer spaltenkonstanten Knotenmatrix K_P die Polynome p_m in der einfachen Form

$$(6.5) \quad p_0(z) = 1; \quad p_m(z) = \frac{z - \xi_m}{1 - \xi_m} p_{m-1}(z) \quad (m \geq 1)$$

geschrieben werden können. (6.3) ist als Iterationsverfahren bekannt unter dem Namen *nicht-stationäre Richardson-Extrapolation 1. Art*. Für $\xi_m = \xi$, d. h. $\mu_m = \mu = 1/(1 - \xi)$, $m \geq 1$, wird (6.3') zur stationären Rekursion (1.16). Damit ist auch gezeigt, daß die Rechenvorschrift (1.16) aus dem ersten Abschnitt tatsächlich eine semiiterative Methode repräsentiert.

Wie können wir nun die Ergebnisse der letzten Paragraphen verwenden, um die Parameter μ_m in (6.3) „geschickt zu wählen“? Besteht die Matrix K_P aus Knoten, die bezüglich einer kompakten Menge $\Omega \in \mathbb{M}$ gleichverteilt sind, so induziert K_P nach Satz 4.2 eine für Ω asymptotisch optimale semiiterative Methode; allerdings wird K_P i. allg. nicht spaltenkonstant sein. Um trotzdem Satz 6.1 benutzen zu können, wendet man den folgenden Trick an, den wir hier für das System der *Fejér-Knoten* beschreiben, der sich aber auch bei anderen Knotenmatrizen anwenden läßt. Kurz gesagt, wir wählen eine Teilfolge der Knoten, so daß einerseits die Gleichverteilung erhalten bleibt und andererseits sich eine spaltenkonstante Matrix ergibt.

Sei $\Omega \in \mathbb{M}$; zusätzlich setzen wir voraus, daß die konforme Abbildung ψ von (4.2), die das Außengebiet des Einheitskreises auf das Komplement von Ω abbildet, sich stetig auf den Rand der Einheitskreisscheibe ausdehnen läßt. Das ist beispielsweise richtig, wenn der Rand von Ω eine Jordan-Kurve ist. Die Fejér-Kno-

ten sind dann durch

$$(6.6) \quad \xi_j^{(m)} := \psi \left(\exp \left[2\pi i \frac{j-1}{m} \right] \right) \quad (m \geq 1, 1 \leq j \leq m)$$

definiert. Sie sind gleichverteilt auf Ω (vgl. [17, S. 68]), aber die Matrix $K_p = (k_{j\ell})$ ist sicher nicht spaltenkonstant. Für jedes $j > 1$ gibt es eindeutig bestimmte ganze Zahlen k und ℓ mit $2^k < j \leq 2^{k+1}$ und $j = 2^k + \ell$, $1 \leq \ell \leq 2^k$.

Wir setzen $\xi_1 := 1$, $\xi_j := \exp [2\pi i(2\ell - 1)/2^{k+1}]$, $j > 1$, d. h. ξ_j ist eine 2^{k+1} -te Einheitswurzel, und dann

$$(6.7) \quad \xi_j := \psi(\xi_j) \quad (j \geq 1).$$

Es ist nicht schwer zu sehen, daß die Knoten $\{\xi_j\}_{j \geq 1}$ ebenfalls gleichverteilt auf Ω sind; die zugehörige Knotenmatrix K_p ist aber spaltenkonstant, so daß wir Satz 6.1 anwenden können.

Ist das Ausgangsproblem $x = Tx + c$ reell, d. h. $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $c \in \mathbb{R}^n$, so wird die Menge Ω , die das Spektrum von T enthält, symmetrisch zur reellen Achse sein. In diesem Fall wird man sich bei der Anwendung des Iterationsverfahrens (6.3) auf reelle Arithmetik beschränken wollen. Die Fejér-Knoten $\xi_j^{(m)}$ nach (6.6) sind zwar komplexe Zahlen, aber ebenfalls symmetrisch zur reellen Achse, d. h. zu jedem j , $1 \leq j \leq m$, existiert ein j' , $1 \leq j' \leq m$, mit $\xi_j^{(m)} = \overline{\xi_{j'}^{(m)}}$. Die „modifizierten“ Fejér-Knoten nach (6.7) besitzen dann offenbar eine analoge Symmetrieeigenschaft. Durch eine geeignete Kombination zweier Iterationsschritte (6.3) kann daher auf komplexe Rechnung vollständig verzichtet werden (vgl. auch Opfer-Schober [39, Theorem 2.3]).

Erfüllen die Polynome p_m nach (1.10) eine $(k+1)$ -gliedrige Rekursionsformel

$$(6.8) \quad p_m(z) = \mu_{m,0} z p_{m-1}(z) + \sum_{j=1}^k \mu_{m,j} p_{m-j}(z) \quad (m \geq k)$$

mit komplexen Koeffizienten $\mu_{m,j}$ ($0 \leq j \leq k$), so können die Vektoren y_m von (6.1) ebenfalls rekursiv berechnet werden. Wir beschreiben dies für $k=2$:

Satz 6.2. *Angenommen, die Polynome p_m von (1.10) genügen einer dreigliedrigen Rekursion der folgenden Form $p_0(z) = 1$; $p_1(z) = \pi_{1,0} + \pi_{1,1}z$;*

$$(6.9) \quad p_m(z) = (\mu_{m,0}z + \mu_{m,1})p_{m-1}(z) + \mu_{m,2}p_{m-2}(z) \quad (m \geq 2)$$

mit $\mu_{m,j} \in \mathbb{C}$, $0 \leq j \leq 2$, und $\sum_{j=0}^2 \mu_{m,j} = 1$, dann gilt für die Vektoren y_m von

$$(6.10) \quad \begin{aligned} y_0 &= x_0; & y_1 &= y_0 + \pi_{1,1} \tilde{r}_0; \\ y_m &= y_{m-1} + \mu_{m,0} \tilde{r}_{m-1} - \mu_{m,2}(y_{m-1} - y_{m-2}) \quad (m \geq 2), \end{aligned}$$

wobei $\tilde{r}_m = c - (I - T)y_m$ der zu y_m gehörige Residuenvektor ist.

Resultate dieses Typs findet man häufig in der Literatur (vgl. etwa Stiefel [51], Faddejew-Faddejewa [13, § 90]). Die wohl bekannteste und am häufigsten verwendete semiiterative Methode, die sogenannte *Tschebyscheff-semiiterative Methode*, ordnet sich ebenfalls hier ein:

Beispiel 6.3 (vgl. Manteuffel [32]). Dieses Verfahren wird von den Polynomen

$$p_m(z) = T_m \left[\frac{2z - (\alpha - \beta)}{\beta - \alpha} \right] / T_m \left[\frac{2 - (\alpha + \beta)}{\beta - \alpha} \right] \quad (m \geq 0)$$

erzeugt (vgl. [53, Chapter 5]). Hier bezeichnen α und β komplexe Zahlen mit $1 \notin [\alpha, \beta] := \{z = \alpha + \lambda(\beta - \alpha) : 0 \leq \lambda \leq 1\}$ und T_m das Tschebyscheff Polynom 1. Art vom Grad m , d. h.

$$T_0(z) = 1; \quad T_1(z) = z; \quad T_m(z) = 2zT_{m-1}(z) - T_{m-2}(z) \quad (m \geq 2).$$

Mit den Abkürzungen $\gamma := (\beta - \alpha)/2$ und $\delta := 1 - (\alpha + \beta)/2$ schließen wir aus Satz 6.2, daß sich die Iterierten y_m von (6.1) gemäß (6.10) rekursiv berechnen lassen. Durch

$$(6.11) \quad \begin{aligned} \mu_{2,0} &= 2\delta/(2\delta^2 - \gamma^2); & \mu_{2,2} &= \delta\mu_{2,0} - 1 \quad \text{und} \\ \mu_{m,0} &= \left[\delta - \left(\frac{\gamma}{2} \right)^2 \mu_{m-1,0} \right]^{-1}; & \mu_{m,2} &= \delta\mu_{m,0} - 1 \quad (m > 2) \end{aligned}$$

erhält man die zugehörigen Koeffizienten (vgl. [9, Section 3]).

7 Euler-Verfahren

Wir wollen nun eine Klasse von semiiterativen Methoden beschreiben, die sowohl günstige analytische wie algorithmische Eigenschaften besitzen. Dazu müssen wir neben den unendlichen Dreiecksmatrizen P und Q (vgl. (1.6) und (2.5)) noch eine weitere Transformationsmatrix V einführen, durch die sich ein semiiteratives Verfahren beschreiben läßt. Zunächst kann man die Vektorfolge $\{y_m\}_{m \geq 0}$ von

(1.7) als die Partialsummenfolge der Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} z_j$ mit den *Änderungsvektoren*

$z_j := y_j - y_{j-1}, j \geq 0, y_{-1} := 0$, auffassen. Entsprechend gibt es eine Matrix V , die die Reihe (2.2) mit den Gliedern $x_0, r_0, r_1, r_2, \dots$ direkt in die Reihe mit den Gliedern z_0, z_1, z_2, \dots transformiert. V beschreibt die durch P definierte Transformation in der sogenannten *Reihe-Reihe-Form* (vgl. Zeller-Beekmann [59, S. 6]). Von der „Folge-Folge-Matrix“ P haben wir gefordert, daß alle ihre Zeilensummen identisch gleich 1 sind. Da die Matrizen $P, Q = PS$ und V über

$$(7.1) \quad V = S^{-1}PS = S^{-1}Q; \quad P = SVS^{-1}; \quad Q = SV$$

miteinander gekoppelt sind (S bzw. S^{-1} gemäß (2.4)), besitzt die unendliche Dreiecksmatrix $V := (\rho_{j,m})_{j \geq 0, 0 \leq m \leq j}$ die folgende Eigenschaft

$$(7.2) \quad \rho_{0,0} = 1; \quad \rho_{j,0} = 0 \quad (j \geq 1).$$

Eine semiiterative Methode kann demnach durch eine der Matrizen P, Q und V induziert werden; die beiden anderen lassen sich dann nach (7.1) berechnen.

Allgemeine Euler-Verfahren lassen sich am einfachsten durch „Reihe-Reihe-Matrizen“ V beschreiben. Bezeichnen wir mit $D_\eta := D(0, \eta)$ (vgl. Beispiel 3.3) die offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt 0 und Radius η sowie mit \bar{D}_η deren Abschluß, dann heißt h eine *Euler-Funktion*, wenn eine offene Umgebung D von

\bar{D}_1 existiert, so daß

- (i) h in D meromorph und schlicht ist, und
- (ii) $h(0) = 0, h(1) = 1$ gelten.

Jede Euler-Funktion h ist in einer Nullumgebung holomorph, d. h. es gibt eine Zahl $\nu = \nu(h) > 0$, so daß wir h – und damit alle Potenzen von h – in D_ν in eine Taylorreihe entwickeln können:

$$(7.3) \quad [h(z)]^m =: \sum_{j=m}^{\infty} \rho_{j,m} z^j, \quad (m = 0, 1, 2, \dots; |z| < \nu).$$

Die Koeffizienten $\{\rho_{j,m}\}_{j \geq 0, 0 \leq m \leq j}$ formen eine unendliche untere Dreiecksmatrix $V = V(h)$, die offensichtlich der Bedingung (7.2) genügt. Deshalb sind die Zeilensummen der nach (7.1) gebildeten Matrix $P(h) = SV(h)S^{-1}$ alle gleich 1, daß $P(h)$ bzw. $V(h)$ tatsächlich eine semiiterative Methode induzieren. Wir nennen sie ein *Euler-Verfahren* (in der Summierungstheorie spricht man von einem *allgemeinen Euler-Verfahren*, vgl. [59, S. 132]), das durch die Euler-Funktion h definiert ist.

Aus (7.3) erkennen wir, daß die m -te Spalte von $V(h)$ gerade aus den Reihenkoeffizienten von h^m besteht. Das bedeutet insbesondere, daß die Matrix $V(h)$ durch ihre erste Spalte vollständig festgelegt ist. Bezeichnen wir mit (vgl. (3.6))

$$(7.4) \quad \mathbf{P}_E := \{P(h) : P(h) = SV(h)S^{-1}, h \text{ ist eine Eulerfunktion}\} \subseteq \mathbf{P}$$

die Klasse der Euler-Verfahren, so ist \mathbf{P}_E offenbar sehr viel kleiner als die Klasse aller Dreiecksmatrizen P , die eine semiiterative Methode erzeugen, denn die Koeffizienten einer Matrix $P \in \mathbf{P}$ sind – außer der Zeilensummenbedingung (1.8) – keiner weiteren Einschränkung unterworfen. Aus diesem Grund ist der nächste Satz wichtig.

Satz 7.1 [9, Theorem 15]. *Zu jedem $\Omega \in \mathbf{M}$ gibt es ein Euler-Verfahren, das ein asymptotisch optimale semiiterative Methode bezüglich Ω ist.*

Zum Beweis geht man von der Funktion ψ nach (4.2) aus, die das Außengebiet des Einheitskreises konform auf das Komplement von Ω abbildet. Bezeichnet $\kappa = \kappa(\Omega)$ den asymptotischen Konvergenzfaktor von Ω , so ist – bis auf eine Rotation $z \rightarrow e^{i\theta} z$ – durch

$$(7.5) \quad h(z) := 1/\psi(1/(\kappa z))$$

eine Euler-Funktion erklärt, von der man zeigen kann, daß sie eine *asymptotisch optimale* semiiterative Methode erzeugt.

Ist eine Euler-Funktion h durch ihre Potenzreihe

$$h(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \rho_{j,1} z^j \quad (\text{vgl. (7.3)})$$

gegeben, so lassen sich die Koeffizienten μ_j der Funktion

$$(7.6) \quad \tilde{h}(z) := 1/h(z) = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{1}{z} - \mu_1 - \mu_2 z - \mu_3 z^2 - \dots \right)$$

leicht rekursiv bestimmen. Es gilt dann

Satz 7.2 [9, Theorem 4]. *Es sei eine Euler-Funktion h und damit $\tilde{h} := 1/h$ gemäß (7.6) gegeben. Die Vektoren y_m des von h erzeugten Euler-Verfahrens können dann folgendermaßen berechnet werden:*

$$(7.7) \quad y_0 = x_0; \quad y_{m+1} = \mu_0[\tilde{r}_m + y_m] + \sum_{j=1}^m \mu_j y_{m+1-j} + \left(1 - \sum_{j=0}^m \mu_j\right) y_0 \quad (m \geq 0)$$

mit $\tilde{r}_m = c - (I - T)y_m$.

Der Beweis folgt aus einem Koeffizientenvergleich: Aus der Identität $h^{m-1} = \tilde{h}h^m$ kann man Rekursionsformeln für die Elemente $\rho_{j,m}$ von $V(h)$ und daraus dann (7.7) ableiten.

Kennen wir für ein $\Omega \in \mathbf{M}$ die Abbildung ψ nach (4.2), so stehen uns nun zwei Möglichkeiten zur Verfügung, eine in Bezug auf Ω asymptotisch optimale Methode zu konstruieren. Wir können einmal das System der Fejérknoten bestimmen und danach die Vektoren y_m in der Form (6.3) einer nichtstationären einstufigen Richardson-Extrapolation berechnen, wie es in Abschnitt 6 beschrieben wurde. Dazu benötigt man die eigentliche Abbildungsfunktion ψ gar nicht, sondern nur die zugehörige „Ränderzuordnungsfunktion“ (vgl. Gaier [16, Kap. 2]). Wir erhalten eine zweite asymptotisch optimale Methode, wenn wir nach (7.5) eine Euler-Funktion h bestimmen und dann die Vektoren y_m mit Hilfe von (7.7) errechnen. Allerdings werden wir zur Konstruktion von y_m alle vorherigen Iterierten y_j ($0 \leq j \leq m-1$) benötigen. Bei großen Systemen ist dieser Weg demnach nicht zu empfehlen. Aus diesem Grund ist auch das folgende Korollar nützlich:

Korollar (zu Satz 7.2). *Hat die Euler-Funktion h die spezielle Gestalt*

$$(7.8) \quad h(z) = \frac{\mu_0 z}{1 - \mu_1 z - \dots - \mu_k z^k},$$

$\mu_j \in \mathbf{C}$, $\sum_{j=0}^k \mu_j = 1$, so genügen die Iterierten y_m des durch h erzeugten Euler-Verfahrens der Rekursion

$$(7.9) \quad y_m = \mu_0(c + Ty_{m-1}) + \mu_1 y_{m-1} + \dots + \mu_k y_{m-k} \quad (m \geq k).$$

Insbesondere stellt dieses Euler-Verfahren also ein k -stufiges stationäres Iterationsverfahren dar.

Im allgemeinen kann man aber wohl nicht davon ausgehen, daß die konforme Abbildung ψ nach (4.2) zu einer gegebenen kompakten Menge $\Omega \in \mathbf{M}$ bekannt ist. Wie soll man dann vorgehen, um ein möglichst günstiges semiiteratives Verfahren für Ω zu konstruieren? Ein Weg, der auch von anderen Autoren vorgeschlagen wurde (siehe etwa Opfer-Schober [39], de Pillis [43]), besteht darin, Ω in eine weitere Menge $\tilde{\Omega} \in \mathbf{M}$ ($\Omega \subsetneq \tilde{\Omega}$) einzuschließen, für die man ein asymptotisch optimales Verfahren kennt. Ist diese Methode etwa durch die unendliche Dreiecksmatrix $P \in \mathbf{P}$ (1.9) induziert, so folgt

$$\kappa(\Omega) \leq \kappa(\Omega, P) \leq \kappa(\tilde{\Omega}, P) = \kappa(\tilde{\Omega}) < 1,$$

was sich unmittelbar aus der Definition des Konvergenzfaktors und dem Vergsatz 4.3 ergibt. Mit anderen Worten: P induziert i. allg. zwar kein bezüglich Ω asymptotisch optimales, aber zumindest ein *konvergentes* Verfahren. Paßt sich darüber hinaus $\tilde{\Omega}$ gut an Ω an – d. h. grob gesagt, ist $\tilde{\Omega} \setminus \Omega$ eine „kleine Menge“ – so wird man erwarten, daß sich $\kappa(\Omega)$ und $\kappa(\tilde{\Omega})$ nur wenig unterscheiden oder – in anderen Worten, daß die Matrix P ein „fast optimales Verfahren“ für Ω induziert.

Dieses Vorgehen setzt allerdings die Kenntnis einer größeren Anzahl von „Modellmengen“ $\tilde{\Omega}$ voraus, für die asymptotisch optimale semiiterative Methoden bekannt sind. Natürlich wird man zusätzlich verlangen, daß man diese Verfahren effektiv durchführen kann. Es liegt deshalb nahe, Klassen von semiiterativen Methoden zu betrachten, die diese Forderung erfüllen, und zu untersuchen, für welche Mengen wir asymptotisch optimale Verfahren erhalten. Diese Mengen können dann als Modellmengen im oben beschriebenen Sinn verwendet werden. Opfer-Schober [39] betrachtet beispielsweise die *zyklische Richardson-Extrapolation*, ein semiiteratives Verfahren, das durch eine spezielle spaltenkonstante Knotenmatrix (vgl. Abschnitt 6) induziert wird. Es stellt sich heraus, daß dieses Verfahren für *Lemniskaten*, d. h. für Mengen des Typs $\tilde{\Omega} = \{z \in \mathbf{C} : |p_k(z)| \leq \rho\}$ asymptotisch optimal sind. Hier bezeichnet p_k ein (festes) Polynom vom Grad k , das durch die Wahl der Knoten festgelegt ist. Für $k > 1$ kann es allerdings schwierig sein, solche Lemniskaten zu konstruieren, weil dies letztlich bedeutet, das Urbild einer Kreisscheibe unter der nichtlinearen Abbildung p_k zu berechnen. Wir wollen nun zeigen, daß Euler-Verfahren, speziell Euler-Verfahren der Ges (7.8), eine Verfahrensklasse darstellen, die für diese Zwecke gut geeignet ist.

Ist D_η wieder die offene Kreisscheibe um den Ursprung mit Radius η , definieren wir für eine gegebene Euler-Funktion h ihre maximale Ausdehnung durch

$$(7.10) \quad \hat{\eta}(h) := \sup \{ \eta : h \text{ ist meromorph und schlicht in } D_\eta \}.$$

Sicher gilt $\hat{\eta}(h) > 1$ und wir erhalten

Satz 7.3 (vgl. [38, Corollary 2]). *Sei h eine Euler-Funktion und sei $\tilde{h} := 1/h$ (vgl. (7.6)). Das zugehörige Euler-Verfahren ist dann eine asymptotisch optimale semiiterative Methode in Bezug auf die Mengen*

$$(7.11) \quad S_\eta(h) := \mathbf{C} \setminus \tilde{h}(D_\eta), \quad 1 < \eta \leq \hat{\eta}(h).$$

Für diese η gilt

$$(7.12) \quad \kappa(S_\eta(h)) = 1/\eta.$$

Wegen der Voraussetzungen an eine Euler-Funktion sind die kompakten Mengen $S_\eta(h)$ einfach zusammenhängend; ihre Ränder sind die Bilder der Kreisscheibe mit Radius η unter der Abbildung \tilde{h} . Daß hier Bilder und nicht Urbilder wie bei der zyklischen Richardson-Extrapolation zu bestimmen sind, macht unsere Aufgabe wesentlich einfacher.

Besonders leicht lassen sich die Bereiche $S_\eta(h)$ für die im Korollar zu Satz 7.2 auftretenden Euler-Funktionen $h(z) = (\mu_0 z) / (1 - \mu_1 z - \dots - \mu_k z^k)$ angeben. Für $k = 1$ ist $\tilde{h} := 1/h$ durch $\tilde{h}(z) = (1 - (1 - \mu_0)z) / (\mu_0 z)$ gegeben; die Mengen $S_\eta(h)$ sind abgeschlossene konzentrische Kreisscheiben mit dem Mittelpunkt

$1 - 1/\mu_0$ und den Radien $1/(\eta|\mu_0|)$, $1 < \eta < \infty$. Nach (7.9) kann man die Näherung y_m dieses Euler-Verfahrens gemäß

$$y_m = \mu_0 T y_{m-1} + (1 - \mu_0) y_{m-1} + \mu_0 c$$

berechnen. Ein Vergleich mit (1.16) zeigt, daß wir hier das aus dem ersten Abschnitt bereits bekannte Euler-Knopp-Verfahren erhalten haben.

Für $k = 2$ ist $\tilde{h} = 1/h$ eine Abbildung vom Joukowski-Typ. h ist genau dann eine Euler-Funktion, wenn $|\mu_2| < 1$ ist, und es gilt $\hat{\eta}(h) = 1/\sqrt{|\mu_2|}$. Als Euler-Verfahren resultiert nach (7.9) eine zweistufige Methode, die manchmal auch Richardson-Extrapolation zweiter Art genannt wird. Die Bereiche $S_\eta(h)$, $1 < \eta \leq \hat{\eta}(h)$, sind die abgeschlossenen Innengebiete von konfokalen Ellipsen, deren Brennpunkte und Halbachsen durch die Parameter μ_0, μ_1, μ_2 und η bestimmt sind (vgl. [9, § 6]). Für $\eta = \hat{\eta}(h)$ ergibt sich gerade das Intervall zwischen den Brennpunkten. Ist umgekehrt Ω das Innengebiet einer Ellipse oder ein Intervall, so kann man Parameter μ_0, μ_1, μ_2 angeben, so daß das zugehörige Euler-Verfahren asymptotisch optimal für Ω ist (vgl. [9, § 6]).

Beispiele für die Fälle $k = 3$ und $k = 4$ sind in [36] und [38, Example 4] beschrieben.

Der nächste Satz stellt schließlich die Verbindung zu Abschnitt 5 her:

Satz 7.4 [9, Theorem 21]. *Sei $\Omega \in \mathbf{M}$, bezeichne $\hat{\psi}$ die konforme Abbildung nach (5.1) und $\hat{F}_k(z) = F_k(z; 1/\hat{\psi}')$, $k \geq 0$, die zugehörigen verallgemeinerten Faberpolynome nach (5.4). Außerdem sei h die in Satz 7.1 beschriebene Euler-Funktion. Dieses Euler-Verfahren ist dann identisch mit der in Abschnitt 5 beschriebenen semiterativen Methode, die von der Folge $\{\hat{F}_k\}_{k \geq 0}$ erzeugt wird. Umgekehrt kann man auch jede dieser „Faber-Methoden“ als Euler-Verfahren auffassen.*

Die wichtigste Konsequenz dieses Satzes, bei dessen Beweis Satz 7.2 verwendet wird, ist, daß man die Aussagen der Sätze 5.1 und 5.2 nun auf Euler-Verfahren anwenden kann.

Die Anwendung von Euler-Verfahren zur iterativen Lösung linearer Gleichungssysteme wurde von Niethammer [34] untersucht. Mit anderer Normierung und ohne Bezug zur Summierungstheorie werden diese Methoden von Kublanovskaya [28] im Zusammenhang mit analytischer Fortsetzung behandelt (vgl. auch Faddejew-Faddejewa [13, Kap. IX]).

8 Ein Beispiel

Wir wollen nun versuchen, die Ergebnisse der letzten Abschnitte an unserem Testbeispiel (vgl. Beispiel 1.1) zu illustrieren. Erinnern wir uns: Durch Diskretisierung der partiellen Differentialgleichung (1.12) erhalten wir ein lineares Gleichungssystem mit der Eigenschaft, daß alle Eigenwerte des Gesamtschrittoperators in einem Rechteck $R_{\alpha, \beta} \in \mathbf{M}$ (vgl. (1.13), (1.14)) enthalten sind. Wie wir in Abschnitt 3 erwähnt haben, sind Rechtecksgebiete auch aus einem anderen Grund interessant: Mit dem Satz von Bendixson (vgl. Householder [25, S. 69]) kann man ein Rechteck konstruieren, das die Eigenwerte einer gegebenen Matrix umfaßt.

In Beispiel 1.1 haben wir gesehen, daß das Gesamtschrittverfahren in unserem Modellproblem nur in Ausnahmefällen konvergiert. In Beispiel 3.5 haben wir dann eine erste semiiterative Methode in bezug auf das Gesamtschrittverfahren betrachtet: Das Euler-Knopp-Verfahren, das in diesem Zusammenhang oft Jacobi-Over-Relaxation (JOR-Verfahren) genannt wird, konvergiert – bei geeigneter Wahl des Parameters μ (vgl. (3.9)) – zwar immer, die Konvergenzgeschwindigkeit ist allerdings für „große Rechtecke“ sehr gering (siehe Tabelle 1).

Um festzustellen, mit welcher Konvergenzgeschwindigkeit wir bei einer semiiterativen Verfahren hier überhaupt rechnen können, müssen wir den Konvergenzfaktor $\kappa(R_{\alpha,\beta})$ des Rechtecks $R_{\alpha,\beta}$ bestimmen. Dieser ist per Definition das Infimum von $\{\kappa(R_{\alpha,\beta}, P) : P \in \mathbf{P}\}$; d. h. keine semiiterative Methode besitzt in bezug auf $R_{\alpha,\beta}$ einen Konvergenzfaktor, der kleiner als $\kappa(R_{\alpha,\beta})$ ist. Die konforme Abbildung ψ nach (4.2), die das Außengebiet des Einheitskreises auf das Komplement von $R_{\alpha,\beta}$ abbildet, und durch die $\kappa(R_{\alpha,\beta})$ bestimmt werden kann (vgl. (4.4), (4.6)), läßt sich in Form einer Laurent-Reihe angeben (vgl. Ellacott [10]). Dann können wir einmal $\kappa(R_{\alpha,\beta})$ angeben (vgl. Tabelle 2), zum andern können wir nun zwei in bezug auf $R_{\alpha,\beta}$ asymptotisch optimale Verfahren konstruieren: Mit Hilfe von (7.5) bestimmen wir eine Euler-Funktion, die ein solches Verfahren erzeugt. Die zugehörige Vektorfolge $\{y_m\}_{m \geq 0}$ läßt sich nach Satz 7.2 rekursiv berechnen, allerdings werden zur Berechnung von y_m alle vorherigen Näherungen y_k ($0 \leq k \leq m-1$) benötigt. Da wir die Abbildung ψ kennen, sind wir aber auch in der Lage, die zu $R_{\alpha,\beta}$ gehörenden Fejér-Knoten nach (6.6) zu bestimmen. Wenn wir dann den in Abschnitt 6 beschriebenen Trick anwenden, um zu einer spaltenweisen konstanten Knotenmatrix zu kommen, so erhalten wir eine nichtstationäre Richardson-Extrapolation erster Art, die asymptotisch optimal für unser Problem ist. Hier treten keine Speicherprobleme auf, auf der anderen Seite ist dieses Verfahren aber nur dann numerisch stabil, wenn man die Extrapolationsparameter μ d. h. hier die Fejér-Knoten – geeignet numeriert (vgl. Anderssen-Golub [2]).

Als nächstes wollen wir versuchen, das Rechteck $R_{\alpha,\beta}$ in Standardgebiete einzuschließen, für die wir optimale Methoden sehr viel leichter – d. h. ohne Verwendung der konformen Abbildung ψ – konstruieren können. Im letzten Paragraphen haben wir behauptet, daß Euler-Verfahren, speziell solche, die von Euler-Funktionen der Form (7.8) erzeugt werden, für diese Aufgabe besonders gut geeignet sind. Das werden wir nun für die Fälle $k = 1, 2$ und 4 an unserem Testbeispiel 1.1 demonstrieren.

Zunächst ziehen wir aus dem Vergleichssatz 4.3 und Satz 7.3 eine unmittelbare Folgerung:

Lemma 8.1. *Induziert $P(h)$ ein Euler-Verfahren und ist $\Omega \in \mathbf{M}$ mit $\Omega \subset S_\eta(h)$ für ein $1 < \eta < \hat{\eta}(h)$ (vgl. (7.10)), so folgt $\kappa(\Omega) \leq \kappa(\Omega, P(h)) \leq 1/\eta$.*

Sobald wir also das Rechteck $R_{\alpha,\beta}$ in einen der Bereiche $S_\eta(h)$ eingeschließen haben, kennen wir eine obere Schranke für den asymptotischen Konvergenzfaktor des zugehörigen Euler-Verfahrens. Beim einstufigen Verfahren mit Parameter μ (vgl. (1.16)) ist $S_\eta(h)$ die abgeschlossene Kreisscheibe $\bar{D}(1 - 1/\mu, 1/|\eta\mu|)$ (siehe Abschnitt 6). Wenn wir deshalb eine solche Kreisscheibe finden, die das Rechteck $R_{\alpha,\beta}$, aber nicht den Punkt $z = 1$ enthält, so konvergiert das einstufige

Verfahren (1.16) mit einem Konvergenzfaktor, der höchstens gleich $1/\eta$ ist. Nun gibt es natürlich viele Kreisscheiben, die diese Bedingung erfüllen; man kann also versuchen, den Konvergenzfaktor $1/\eta$ zu minimieren, was wir durch die Wahl des Parameters $\mu = \hat{\mu}$ nach (3.9) in Beispiel 3.5 getan haben (vgl. Yeyios [56]). Der Ausdruck „optimales Verfahren“ ist hier allerdings nicht gerechtfertigt, denn wir erhalten zwar das für unser Problem bestmögliche Verfahren der Form (1.16), aber wegen Satz 4.3 keineswegs eine asymptotisch optimale Methode für $R_{\alpha, \beta}$. In ähnlicher Weise kann man nun versuchen, das Rechteck $R_{\alpha, \beta}$ mit Ellipsen „einzufangen“; hier ist es schon schwieriger, diejenigen Parameter zu finden, die zum kleinsten Konvergenzfaktor (innerhalb der Klasse der stationären zweistufigen Verfahren) führen:

Satz 8.2 (Kjellberg [26], Young [57, Chapter 6.4]). *Sei eine Euler-Funktion der Form*

$$(8.1) \quad h(z) = \frac{\mu_0 z}{1 - \mu_1 z - \mu_2 z^2}; \quad \mu_0, \mu_1, \mu_2 \in \mathbf{C}, \quad \sum_{i=0}^2 \mu_i = 1$$

gegeben. Der „optimale“ Konvergenzfaktor

$$(8.2) \quad \kappa_2 := \min \{ 1/\eta : R_{\alpha, \beta} \subseteq S_\eta(h), h \text{ hat die Form (8.1) und } 1 < \eta \leq \hat{\eta}(h) \}$$

ist die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung

$$\left[\alpha \frac{1 + \kappa^2}{2\kappa} \right]^{2/3} + \left[\beta \frac{1 - \kappa^2}{2\kappa} \right]^{2/3} = 1,$$

die im Intervall $(0, 1)$ liegt.

Die Parameter μ_0, μ_1, μ_2 , die den Konvergenzfaktor κ_2 nach (8.2) liefern, lassen sich dann einfach angeben (siehe Hageman-Young [23, § 12.2], [38]). Werte von κ_2 für einige Rechtecke $R_{\alpha, \beta}$ findet man in Tabelle 2.

In Beispiel 6.3 haben wir ein nichtstationäres zweistufiges Verfahren, nämlich das Tschebyscheff-Verfahren, erwähnt. Diese Methode ist asymptotisch stationär, d. h. die Koeffizienten $\mu_{m, k}$ ($k = 0, 1, 2$, siehe (6.11)) streben für $m \rightarrow \infty$ gegen feste Werte μ_k (vgl. Golub-Varga [19]). Mit Hilfe der Sätze Perrons über die Lösung Poincaréscher Differenzgleichungen (siehe [41]) kann man daraus schließen, daß sich die Tschebyscheff-semiiterative Methode asymptotisch wie ein stationäres zweistufiges Verfahren verhält. Damit ist κ_2 nach (8.2) auch der beste Konvergenzfaktor, den wir mit Hilfe eines solchen Tschebyscheff-Verfahrens erzielen können.

Schließlich wollen wir noch Funktionen der Form

$$(8.3) \quad h(z) = \frac{\mu_0 z}{1 - \mu_2 z^2 - \mu_4 z^4} \quad (\mu_0, \mu_2, \mu_4 \in \mathbf{R})$$

betrachten. Es gilt

Lemma 8.3 (vgl. [7]). *h nach (8.3) ist genau dann eine Euler-Funktion, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

$$\begin{aligned} \mu_0 + \mu_2 + \mu_4 = 1, \quad |\mu_4| < \frac{1}{3} \quad \text{und} \quad |\mu_2| < 1 - \mu_4 \quad (\text{falls } \mu_4 \geq 0) \quad \text{oder} \\ |\mu_2| < 1 + 3\mu_4 \quad (\text{falls } \mu_4 \leq 0). \end{aligned}$$

Eine Wahl der Parameter μ_0, μ_2, μ_4 , die diese Bedingung erfüllen und die für ein gegebenes Rechteck $R_{\alpha, \beta}$ zu einem günstigen – im Falle eines Quadrats $R_{\alpha, \alpha}$ sogar zum kleinsten – Konvergenzfaktor führen, wird im folgenden Lemma vorgeschlagen:

Lemma 8.4 (vgl. [7]). *Mit*

$$(8.4) \quad \hat{\mu}_4 = \left[3 + 2\sqrt{1 + 4\alpha\beta/(\alpha + \beta)^2} \right]^{-1}, \quad \hat{\mu}_2 = (1 - \hat{\mu}_4)(\beta - \alpha)/(\alpha + \beta), \\ \hat{\mu}_0 = 2(1 - \hat{\mu}_4)/(\alpha + \beta)$$

hat die Gleichung

$$(8.5) \quad \hat{\mu}_4 \kappa^4 + \hat{\mu}_2 \kappa^2 + \hat{\mu}_0 \kappa = 1$$

genau eine Lösung κ_4 in $(0, 1)$. Für

$$(8.4') \quad \mu_4 = \hat{\mu}_4 \kappa_4^4, \mu_2 = \hat{\mu}_2 \kappa_4^2, \mu_0 = \hat{\mu}_0 \kappa_4$$

ist h nach (8.3) eine Euler-Funktion. Darüberhinaus gilt $\kappa(R_{\alpha, \beta}, P(h)) = \kappa_4$.

Daß diese vierstufigen Verfahren in unserem Fall zu einem kleineren Konvergenzfaktor führen als die optimalen zweistufigen Verfahren nach Satz 8.2, geht „rein anschaulich“ aus Abbildung 1 hervor. Dort sind (für $h = 0,1$ und $\lambda = 2,5$, d. h. $\alpha = 0,4755$ und $\beta = 1,090$) neben dem Rechteck $R_{\alpha, \beta}$ die beiden einschließenden Bereiche $S_{1/\kappa_2}(h_2)$ sowie $S_{1/\kappa_4}(h_4)$ (vgl. (7.11)) gezeichnet. Dabei bezeichnen h_2 bzw. h_4 die Euler-Funktionen, die zum zweistufigen Verfahren nach Satz 8.2 bzw. dem vierstufigen nach Lemma 8.4 führen. $S_{1/\kappa_4}(h_4)$ paßt sich offensichtlich sehr viel besser an das gegebene Rechteck $R_{\alpha, \beta}$ an als $S_{1/\kappa_2}(h_2)$.

In Tabelle 2 sind einige Werte von κ_4 für spezielle Rechtecke enthalten (es wurde stets $h = 0,1$ gesetzt, vgl. auch Tabelle 1).

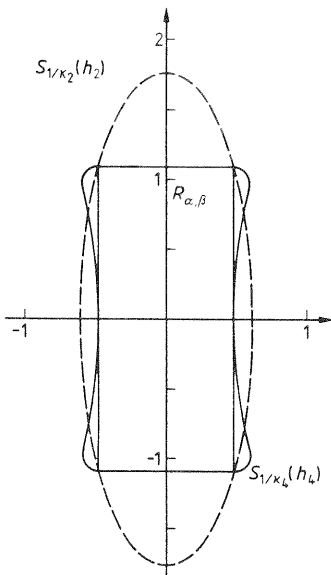


Abbildung 1

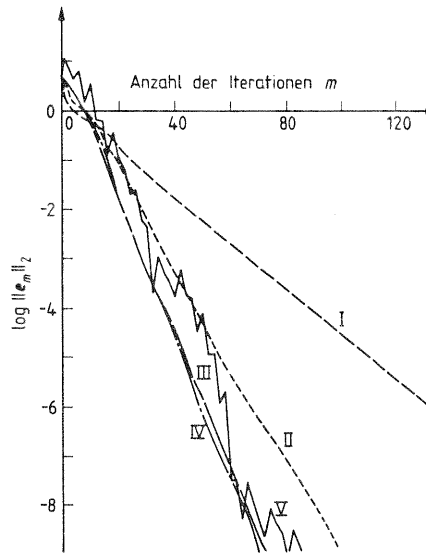


Abbildung 2

Tabelle 2

λ	κ_2 (vgl. (8.2))	κ_4 (vgl. (8.5))	$\kappa(R_{\alpha,\beta})$
1,25	0,5938	0,5122	0,5010
2,5	0,8069	0,7345	0,7117
10	0,9498	0,9279	0,9064
250	0,9979	0,9963	0,9956

Die letzte Zeile dieser Tabelle bedeutet beispielsweise, daß für $\lambda = 250$ eine asymptotisch optimale Methode für das zugehörige Rechteck $R_{\alpha,\beta}$ (hier gilt $\alpha = 0,4755$ und $\beta = 118,9$, vgl. (1.14)) um den Faktor $\ln(0,9956)/\ln(0,9979) \sim 2,1$ *schneller* ist als das beste stationäre zweistufige Verfahren oder das optimierte Tschebyscheff-Verfahren. Das vierstufige Verfahren, dessen Parameter in Lemma 8.4 gegeben sind, ist demgegenüber immerhin noch 1,76mal so schnell.

In Abbildung 2 wird nun das tatsächliche Fehlerverhalten für das lineare Gleichungssystem aus Beispiel 1.1 mit $\lambda = 2,5$ und $h = 0,1$ beschrieben. Getestet werden das JOR-Verfahren (I, vgl. (1.16)) mit dem „optimalen“ Extrapolationsparameter nach (3.9), das stationäre zweistufige Verfahren nach Satz 8.2 (II), das vierstufige Verfahren nach Lemma 8.4 (III) und die beiden oben erwähnten asymptotisch optimalen Methoden, nämlich das optimale Euler-Verfahren (IV) sowie die Richardson-Extrapolation 1. Art, die auf den Fejér-Knoten basiert (V).

Diese optimalen Verfahren haben zwar beide denselben Konvergenzfaktor $\kappa = 0,7117$, trotzdem unterscheiden sie sich in ihrem Fehlerverhalten beträchtlich: Während sich die Fehlernorm beim Euler-Verfahren ungefähr wie κ^m verhält, ist beim Fejér-Knoten-Verfahren ein „wellenförmiger“ Fehlerverlauf zu beobachten. Dieses Phänomen läßt sich dadurch erklären, daß wir nicht alle Fejér-Knoten berücksichtigen, sondern aus algorithmischen Gründen nur eine Teilfolge, nämlich die 2^k -ten Fejér-Knoten ($k = 0, 1, 2, \dots$) verwenden (vgl. Abschnitt 6). Die Fehlernorm $\|\tilde{e}_m\|_2$ wird sich deshalb nur dann wie κ^m verhalten, wenn der Iterationsindex m die Form $m = 2^k$ besitzt, was auch mit der in Abbildung 2 dargestellten Fehlerkurve V übereinstimmt.

9 Ergänzungen

Wir haben die Anwendung von semiiterativen Methoden, also letztlich von Mittelungs- oder Limitierungsmethoden, auf die Lösung linearer Gleichungssysteme, d. h. auf lineare Gleichungen im \mathbb{C}^n untersucht. Wir wollen noch auf die Ergebnisse in allgemeineren Räumen und bei nichtlinearen Gleichungen hinweisen.

Melencov und Muraev [33] betrachten, ausgehend vom Analogon von (1.1) in einem linearen topologischen Raum und den Iterierten (1.2) Verfahren der Form (1.7), stellen dabei aber vor allem limitierungstheoretische Aspekte heraus. Niethammer und Schempp [37], [48] betrachten in Verallgemeinerung von [34] die Anwendungen allgemeiner Euler-Verfahren bei linearen Gleichungen in Hilbert- und Banachräumen.

Ist

(9.1) $x = \varphi(x)$

eine Fixpunktgleichung in einem Banachraum, so konvergiert das Verfahren der sukzessiven Approximation $x_m = \varphi(x_{m-1})$ ($m \geq 1$) gegen einen Fixpunkt, wenn φ kontrahierend ist. Zur Abschwächung der Kontraktionsbedingung schlägt Mann [30] die Anwendung von Mittelungsmethoden auf die Folge $\{x_m\}_{m \geq 0}$ vor. Auf dem gleichen Grund betrachtet Schaefer [47] eine Iteration der Form (1.16), die schon vorher von Krasnoselskii [27] für den Fall $\mu = 1/2$ untersucht wurde. Reinermann [44] betrachtet (1.16) bei variablen Koeffizienten μ_m und stellt die Verbindung mit dem Ansatz von Mann her; er weist auch auf den Zusammenhang mit Euler-Knopp-Summierung hin. Eine Übersicht über diese und weitere Arbeiten gibt Mann [31]; ihnen allen gemeinsam ist, daß sich die Voraussetzung an φ nur von kontrahierend zu „nicht expandierend“, d. h. $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq \|x - y\|$, abschwächen läßt.

Ausgehend von der Erfahrung, daß häufig Methoden, die sich bei linearen Problemen global bewähren, sich auch bei nichtlinearen Aufgaben lokal erfolgreich einsetzen lassen, wurden von Gutknecht, Niethammer und Varga [22] k-stufige Verfahren der Form (7.9) bei Gleichungen der Form (9.1) im \mathbb{C}^n untersucht; unter der Voraussetzung, daß lokal ein eindeutiger Fixpunkt existiert, lassen sich auch bei expandierendem φ lokale Konvergenzaussagen beweisen. Gutknecht und Kaiser [21] verallgemeinern diese Ergebnisse auf Gleichungen in Banachräumen.

Literatur

- [1] Albrecht, P.; Klein, M. P.: Extrapolated iterative methods for linear systems. *SIAM J. Numer. Anal.* **21** (1984) 192–201
- [2] Anderssen, R. S.; Golub, G. H.: Richardson's nonstationary matrix iteration procedure. Rep. STAN-CS-72-304, Comp. Sci. Dep., Stanford University, Stanford, CA 1972
- [3] Bellmann, R.: A note on the summability of formal solutions of linear integral equations. *Duke Math. J.* **17** (1950) 53–55
- [4] de Boor, C.; Rice, J. R.: Extremal polynomials with application to Richardson iteration for indefinite linear systems. *SIAM J. Sci. Stat. Comp.* **3** (1982) 47–57
- [5] Bückner, H.: A special method of successive approximations for Fredholm integral equations. *Duke Math. J.* **15** (1948) 197–206
- [6] Eiermann, M.: Numerische analytische Fortsetzung durch Interpolationsverfahren. Dissertation, Univ. Karlsruhe 1982
- [7] Eiermann, M.: On the application of semiiterative methods generated by Faber polynomials to the solution of nonsymmetric linear equations. In Vorbereitung
- [8] Eiermann, M.; Niethammer, W.: On the construction of semiiterative methods. *SIAM J. Numer. Anal.* **20** (1983) 1153–1160
- [9] Eiermann, M.; Niethammer, W.; Varga, R. S.: A study of semiiterative methods for nonsymmetric systems of linear equations. *Numer. Math.* **47** (1985) 505–515
- [10] Ellacott, S. W.: Computation of Faber series with application to numerical polynomial approximation in the complex plane. *Math. Comp.* **40** (1983) 575–587
- [11] Faber, G.: Über polynomische Entwicklungen. *Math. Ann.* **57** (1903) 398–408
- [12] Faber, G.: Über Tschebyscheffsche Polynome. *J. Reine Angew. Math.* **150** (1920) 79–106
- [13] Faddejew, D. K.; Faddejewa, W. N.: Numerische Methoden der linearen Algebra. München – Wien: Oldenbourg 1964

- [14] Forsythe, G. E.: Solving linear algebraic equations can be interesting. *Bull. Am. Math. Soc.* **59** (1953) 299–329
- [15] Freund, R.; Ruscheweyh, S.: On a class of Chebyshev approximation problems which arise in connection with a conjugate gradient type method. *Erscheint in Numer. Math.*
- [16] Gaier, D.: *Konstruktive Methoden der konformen Abbildung*. Berlin – Göttingen – Heidelberg: Springer 1964
- [17] Gaier, D.: *Vorlesungen über Approximation im Komplexen*. Basel – Boston – Stuttgart: Birkhäuser 1980
- [18] Gantmacher, F. R.: *Matrizenrechnung, Teil I*. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1965
- [19] Golub, G. H.; Varga, R. S.: Chebyshev semiiterative methods, successive over-relaxation iterative methods, and second order Richardson iterative methods. *Numer. Math.* **3** (1961) 147–168
- [20] Gragg, W. B.; Reichel, L.: On the application of orthogonal polynomials to the iterative solution of linear systems of equations with indefinite or non-hermitian matrices. *Erscheint in Linear Algebra Appl.*
- [21] Gutknecht, M. H.; Kaiser, A.: Iterative k-step methods for computing possibly repulsive fixed points in Banach spaces. *Erscheint in J. Math. Anal. Applics.*
- [22] Gutknecht, M. H.; Niethammer, W.; Varga, R. S.: K-step iterative methods for solving nonlinear systems of equations. *Erscheint in Numer. Math.*
- [23] Hageman, L. A.; Young, D. M.: *Applied Iterative Methods*. New York – London – Toronto – Sydney – San Francisco: Academic Press 1981
- [24] Hestenes, M. R.; Stiefel, E.: Methods of conjugate gradients for solving linear systems. *J. Res. Nat. Bur. Stand.* **49** (1952) 409–436
- [25] Householder, A. S.: *The Theory of Matrices in Numerical Analysis*. New York – Toronto – London: Blaisdell Publ. Comp. 1964
- [26] Kjellberg, G.: On the convergence of successive over-relaxation applied to a class of linear systems with complex eigenvalues. *Ericsson Tech. Stockholm* **2** (1958) 245–258
- [27] Krasnosel'skii, M. A.: Zwei Bemerkungen über die Methode der sukzessiven Näherungen. *Uspehi Mat. Nauk (N. S.)* **10** (1953) 123–127 (Russisch)
- [28] Kublanovskaya, V. N.: Application of analytic continuation in numerical analysis by means of change of variables. *Trudy Mat. Inst. Steklov* **53** (1959) 145–185 (Russisch)
- [29] Lanczos, C.: Solution of systems of linear equations by minimized iterations. *J. Res. Nat. Bur. Stand.* **45** (1950) 255–282
- [30] Mann, W. R.: Mean value methods in iteration. *Proc. Amer. Math. Soc.* **4** (1953) 506–510
- [31] Mann, W. R.: Averaging to improve convergence of iterative processes. In: *Functional Analysis Methods in Numerical Analysis*, 169–179, *Lect. Notes in Math.* 701. Berlin – Heidelberg – New York: Springer 1979
- [32] Mantuffel, T. A.: The Tchebychev iteration for nonsymmetric linear systems. *Numer. Math.* **28** (1977) 307–327
- [33] Melencow, A. A.; Muraev, E. B.: Summierung der Iterationen eines linearen operators. *Akad. Nauk Armjan. SSR, Ser. fiz-mat. Nauk* **16** (1963) 3–12
- [34] Niethammer, W.: Iterationsverfahren und allgemeine Euler-Verfahren. *Math.* **102** (1967) 288–317
- [35] Niethammer, W.: Konvergenzbeschleunigung bei einstufigen Iterationsverfahren durch Summierungsmethoden. In: *Iterationsverfahren, Numerische Mathematik, Approximationstheorie*, S. 235–243. Basel: Birkhäuser 1970
- [36] Niethammer, W.; de Pillis, J.; Varga, R. S.: Convergence of block iterative methods applied to sparse least-squares problems. *Linear Algebra Appl.* **58** (1984) 327–341
- [37] Niethammer, W.; Schempp, W.: On the construction of iteration methods for linear equations in Banach spaces by summation methods. *Aequat. Math.* **5** (1970) 273–284
- [38] Niethammer, W.; Varga, R. S.: The analysis of k-step iterative methods for linear systems from summability theory. *Numer. Math.* **41** (1983) 177–206
- [39] Opfer, G.; Schöber, G.: Richardson's iteration for nonsymmetric matrices. *Linear Algebra Appl.* **58** (1984) 343–367

- [40] Ortega, J. M.; Rheinboldt, W. C.: Iterative Solution of Nonlinear Equation in Several Variables. New York – London: Academic Press 1970
- [41] Perron, O.: Über die Poincarésche lineare Differenzgleichung. J. Reine Angew. Math. **137** (1910) 6–64
- [42] Petryshyn, W. V.: On the extrapolated Jacobi or simultaneous displacements method in the solution of matrix and operator equations. Math. Comp. **19** (1965) 37–55
- [43] de Pillis, J.: How to embrace your spectrum for faster iterative results. Linear Algebra Appl. **34** (1980) 125–143
- [44] Reiner mann, J.: Über Toeplitzsche Iterationsverfahren und einige ihrer Anwendungen in der konstruktiven Fixpunkttheorie. Studia Math. **32** (1969) 209–227
- [45] Saad, Y.: Krylov subspace methods for solving large unsymmetric linear systems. Math. Comp. **37** (1981) 105–126
- [46] Saad, Y.; Schultz, M. H.: Conjugate gradient-like algorithms for solving non-symmetric linear systems. Math. Comp. **44** (1985) 417–424
- [47] Schaefer, H. H.: Über die Methode der sukzessiven Approximationen. Jahresh. DMV **59** (1957) 131–140
- [48] Schempp, W.: Iterative solution of linear operator equations in Hilbert space and optimal Euler methods. Arch. Math. **21** (1970) 390–395
- [49] Smirnov, V. L.; Lebedev, N. A.: Functions of a Complex Variable: Constructive Theory. Cambridge, MA: MIT Press 1968
- [50] Smolarski, D. C.; Saylor, P. E.: An optimum semi-iterative method for solving any linear set with a square matrix. Preprint
- [51] Stiefel, E.: Kernel polynomials in linear algebra and their numerical applications. Nat. Bur. Stand. Appl. Math. Ser. **49** (1958) 1–22
- [52] Varga, R. S.: A comparison of the successive overrelaxation method and semi-iterative methods using Chebyshev polynomials. SIAM J. Appl. Math. **5** (1957) 39–46
- [53] Varga, R. S.: Matrix Iterative Analysis. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall 1962
- [54] Walsh, J. L.: Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain. Providence, RI: AMS Colloquium Publications, Vol. XX
- [55] Wierda, G.: Integralgleichungen unter besonderer Berücksichtigung der Anwendungen. Leipzig: Teubner 1930
- [56] Yeiyos, A.: On the optimization of an extrapolation method. Linear Algebra Appl. **57** (1984) 191–203
- [57] Young, D. M.: Iterative Solution of Large Linear Systems. New York: Academic Press 1971
- [58] Young, D. M.; Jea, K. C.: Generalized conjugate gradient acceleration of iterative methods: Part II, the nonsymmetriable case. Rep. CNA-163, Center of Numerical Analysis, University of Texas at Austin
- [59] Zeller, K.; Beekmann, W.: Theorie der Limitierungsverfahren. Berlin: Springer 1970

Dr. M. Eiermann
 Prof. Dr. R. S. Varga
 Institute for Computational Mathematics
 Kent State University
 Kent, Ohio 44242
 USA

Prof. Dr. W. Niethammer
 Institut für Praktische Mathematik
 Universität Karlsruhe
 D-7500 Karlsruhe

(Eingegangen 7. 10. 1985)